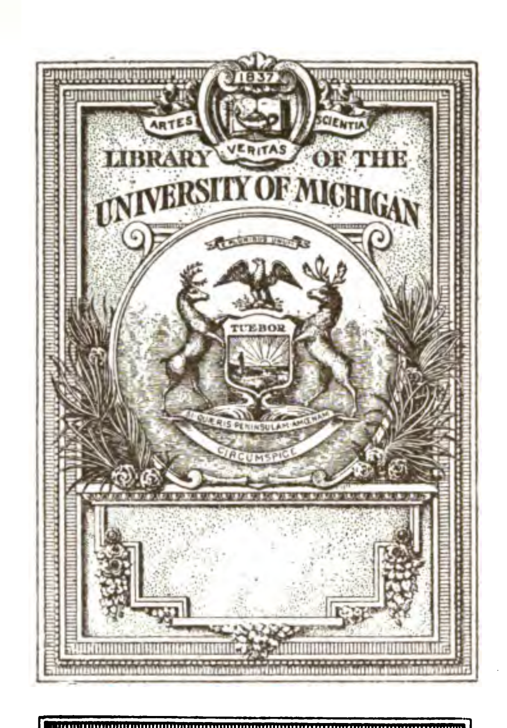

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Lehrbuch

der

Differential- und Integralrechnung

von

Louis Navier,

Mitglied der Academie, Professor an der polytechnischen Schule zu Paris.

Deutsch herausgegeben

von

Dr. Theodor Wittstein,

Professor, Mitglied des Königl. Guelphen-Ordens 4. Classe, Lehrer an der Königlichen Generalstabs-Academie und bei dem Königlichen Cadetten-Corps zu Hannover.

Supplementband.

Die höhere Mechanik, deutsch von L. Mejer.

Hannover.

Hahn'sche Hofbuchhandlung.

1858.

Lehrbuch

der

höheren Mechanik

von

Claude Louis Marie Henri Navier,

Mitglied der Academie, Professor an der polytechnischen Schule zu Paris.

Deutsch bearbeitet

von

Ludwig Mejer,

Lehrer am Lyceum zu Hannover.

Mit einer Vorrede vom Professor Dr. Th. Wittstein.

Als Supplementband

zu desselben Verfassers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, deutsch von Th. Wittstein.

Hannover.

Hahn'sche Hofbuchhandlung.

1858.

Alex. Ziwet
gt.
8-30-1922

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorrede.

Das Werk, dessen Uebersetzung hier vorliegt, ist zu Paris im Jahre 1841 unter dem Titel: „Résumé des leçons de mécanique données à l'école polytechnique par M. Navier“, gleichzeitig mit der Differential- und Integralrechnung desselben Verfassers erschienen, und hätte wohl längst verdient, dem deutschen Publikum in deutscher Sprache zugängig gemacht zu werden. Der Verfasser hat es verstanden mit glücklichem Griffe gerade diejenigen Partieen der Wissenschaft auszuwählen, welche sich zum Gebrauche bei Vorlesungen, insbesondere bei Vorlesungen an technischen Lehranstalten eignen, und damit ein abgerundetes und nicht zu umfangreiches Ganzes geliefert, durch welches dem Lernenden ein vollständiger Begriff der theoretischen Mechanik in ihrer heutigen Gestalt sich aufschließt. Zudem bewähren sich hier wieder derselbe lichtvolle Vortrag und dieselbe präcise Kürze, durch welche schon desselben Verfassers Leçons d'analyse sich auszeichnen. Wenn man an dem Buche etwas tadeln wollte, so möchte dies etwa sein, daß die Grundlegung und die ersten Entwickelungen

der Statik hier zu oberflächlich behandelt erscheinen und zu flüchtig darüber hinweggeeilt wird, um nur rasch zu den Anwendungen zu kommen; aber nicht nur dürfte dies schon in dem Umstande seine volle Entschuldigung finden, daß der Verfasser als einer der ersten Techniker der neueren Zeit diese Anwendungen vorzugsweise im Auge haben mußte, sondern auch der Tadel hört vollständig auf ein solcher zu sein, sobald man in Erwägung zieht, daß dem Studium der höheren Mechanik in der Regel und fast überall eine Elementar-Mechanik voraufgeschickt wird, in welcher die betreffenden Partieen des Breiteren sich erörtert finden. Dessen ungeachtet darf man demnach wohl behaupten, daß das vorliegende Werk von keinem der neuern Lehrbücher der Mechanik, was den Gebrauch bei Vorlesungen betrifft, übertroffen wird, dagegen in der weisen Beschränkung auf ein angemessenes Material und in der Behandlung dieses Materials Vorzüge besitzt, welche für den Lernenden wichtiger sind als diejenige Ueberfülle an wissenschaftlichem Detail, in der andere Lehrbücher ihren Ruhm suchen.

Diese Vorzüge hatten schon lange die Absicht bei mir festgesetzt, meiner früheren deutschen Herausgabe von Navier's Differential- und Integralrechnung, welche in zwei Auflagen verbreitet ist, diejenige der Mechanik nachfolgen zu lassen; auch haben neuere Publicationen auf diesem Gebiete meine Absicht keineswegs zu erschüttern vermocht; aber gehäufte Berufsgeschäfte machten mir die Ausführung fortwährend unmöglich. Um so dankbarer erkenne ich es an, daß Herr Ludwig Meier, Lehrer am Lyceum hierselbst,

sich zur Ausführung der Uebersetzung bereit erklärte und damit den für meine eigenen Vorlesungen von mir längst gewünschten Leitfaden mir in so nahe Aussicht stellte; und aus den vielfachen Proben des Manuscripts, welche ich einzusehen Gelegenheit gehabt habe, darf ich mich überzeugt halten, daß auch Andere, welche das Buch in Gebrauch nehmen wollen, mit mir in den Dank für diese mit ebenso viel Liebe wie Sachkenntniß ausgeführte Arbeit einstimmen werden. Die Verlagshandlung hat mit gewohnter Sorgfalt die äußere Ausstattung angeordnet. Außerdem hat sie für angemessen gehalten, das Werk unter einem doppelten Titel auszugeben, durch welchen es zugleich als Supplementband zu desselben Verfassers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung erscheint; denn nicht nur steht es durch seine zahlreichen Hinweisungen auf dieses Lehrbuch zu demselben in dem innigsten Verhältniß, sondern auch manche Entwickelungen des Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung, welche daselbst nur um ihres Gebrauchs in der Mechanik willen aufgenommen sind, erhalten erst hier ihre volle Rechtfertigung, so daß in Wahrheit durch das Erscheinen der Mechanik das ganze Werk auch in der deutschen Ausgabe erst zum Abschluß gebracht wird.

Dem Vernehmen nach wird in Paris von den Leçons de mécanique, welche im Buchhandel vergriffen sind, gegenwärtig eine neue Auflage vorbereitet, jedenfalls ein Beweis davon, wie man auch in Frankreich, welches die heutige Lehrform der Mechanik geschaffen hat, den Werth dieses Werks zu schätzen weiß. Es schien indessen

nicht geboten, zum Gebrauch für die vorliegende Uebersetzung das Erscheinen dieser neuen Auflage zuvor zu erwarten; denn was dieselbe etwa an Veränderungen oder Zusätzen Neues bringen mag, das ist jedenfalls nicht mehr ein Werk des verstorbenen Verfassers, und durfte deshalb hier außer Acht gelassen werden.

Hannover im August 1858.

Wittstein.

Inhalt.

I. Theil.

II. Theil.

Höhere Mechanik.

Erster Theil.

I. Grundgesetze der Statik. Zusammensetzung der Kräfte.

§. 1. Mit dem Worte Kraft verbindet man den Begriff einer Ursache, die einen Körper in Bewegung zu setzen strebt. Wenn der Körper der Wirkung der Kraft nicht nachgeben kann, weil ein Hinderniß sich einer Veränderung seines Orts widersetzt; so beschränkt sich die Kraft darauf einen Druck hervorzubringen.

Da die Begriffe Druck und Gewicht identisch sind; da man zugleich im Stande ist verschiedene Zustände des Drucks und Gewichts mit einander zu vergleichen; so erfordert eine nähere Untersuchung dieser Größen die Aufstellung einer besondern Einheit. In den Rechnungen der Statik bezieht man die Zahlen, welche das Verhältniß der Kräfte zueinander darstellen, auf Gewichtseinheiten.

Gegenstand der Statik sind die Gesetze, nach denen sich die Kräfte vereinigen, um eine bestimmte Wirkung hervorzubringen, oder sich gegenseitig aufheben, d. h. sich einander ins Gleichgewicht setzen.

§. 2. Die Anwendung mathematischer Theorien auf die Untersuchung der Erscheinungen des Gleichgewichts mußte einige Abstractionen einführen. So beachtet man in den

Elementen nicht die Gestalt der Körper, sondern allein die Punkte derselben, auf welche die Kräfte wirken; man sieht von dem eigenen, durch die Wirkung der Schwerkraft hervorgerufenen Gewichte der Körper ab; endlich zieht man nicht die Eigenschaften der festen Körper in Betracht, unter Einwirkung eines Drucks theilweise ihre Gestalten zu ändern. Statt der natürlichen Körper betrachtet man rein mathematisch ein System materieller Punkte, die durch völlig unbiegsame und undehnsame Linien oder Ebenen, in einigen Fällen durch gleichfalls undehnsame, aber völlig biegsame Fäden verbunden sind. Trotz diesen Abstractionen giebt diese unsere Theorie die wahren Gesetze einer wichtigen Reihe von Erscheinungen und wird nothwendige Führerin in das Reich der gewerblichen Thätigkeit.

§. 3. Die Gesetze der Statik sind auf einigen wenigen Grundsätzen begründet, deren Wahrheit als unmittelbare Folge der Erfahrung zugestanden werden muß. Wenn mehrere Kräfte längs derselben Linie wirken; so ist der Druck, welchen sie hervorbringen, gleich der Summe des Druckes, welchen die nach der einen Seite ziehenden Kräfte hervorrufen, weniger die Summe des Drucks, der durch die nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräfte hervorgebracht wird. Man darf eine Kraft so ansehen, als ob sie an einem beliebigen Punkte ihrer Richtung angebracht wäre, indem man zugleich die Linie, längs welcher die Kraft wirkt, als völlig unbiegsam und undehnsam annimmt.

Ist ein System von Kräften, die auf mehrere Punkte wirken, im Gleichgewicht; so bleibt das Gleichgewicht ungestört, wenn einige dieser Punkte fest werden. Zwei im Gleichgewicht stehende Systeme können über einander geschoben werden: d. h. wenn man eins dieser Systeme so auf das andere gelegt hat, daß einige ihrer Theile in einander fallen; so darf man diese Theile mit einander

vereinigen und an einander befestigen, ohne daß das Gleichgewicht in dem neuen Systeme zu bestehen aufhörte, wenn es nur in den beiden Systemen bestand, die es bilden.

§. 4. Es giebt in der Statik mehrere **Grundgesetze** oder **Prinzipe**, d. h. als Grundlagen dienende Annahmen, welche unmittelbar festgestellt und als Ausgangspunkte benutzt werden können um daraus die weiteren Gesetze der Statik zu entwickeln.

Das Prinzip vom Hebel ist folgendes: Eine unbiegsame, horizontale, in ihrer Mitte unterstützte und an beiden Endpunkten mit gleichen Gewichten belastete Linie ist 1) im Gleichgewicht und erleidet 2) in ihrem Unterstützungspunkte einen Druck, der gleich ist der Summe der beiden Gewichte. Der erste Theil dieses Satzes ist an sich klar; aber von dem zweiten kann man verlangen, daß er bewiesen werde. Um dies zu ermöglichen, schicken wir voraus, daß drei gleiche auf einen Punkt wirkende Kräfte, deren Richtungen einen um diesen Punkt beschriebenen Kreis in drei gleiche Sektoren theilen, augenscheinlich im Gleichgewicht sind.

Fig. 1.

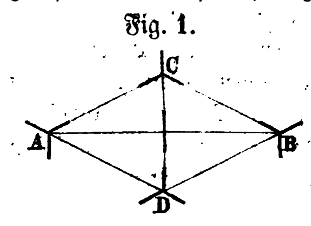


Fig. 1. Es sei nun AB die horizontale Linie. Wenn wir ein Parallelogramm $ABCD$ zeichnen, dessen Winkel 60^0 und 120^0 betragen, und an jeder Ecke dieser Figur nach Richtung der Seiten drei einander gleiche Kräfte anbringen, die sich einander das Gleichgewicht halten werden, außerdem in der Mitte von AB vier den vorhergehenden gleiche Kräfte, je zwei und zwei einander entgegengesetzt: so ist das System im Gleichgewichte und wenn man die einander gleichen und entgegengesetzten Kräfte aufhebt, bleiben die Kräfte, welche sich nach dem Grundgesetze vom Hebel das Gleichgewicht halten müssen.

§. 5. Auch für den Fall, daß der feste Punkt nicht in der Mitte der Linie liegt, kann das Gleichgewicht des Hebels unmittelbar aus dem vorigen Satze abgeleitet werden. Man denke sich eine horizontale Linie mit gleichmäßig ihrer ganzen Länge nach auf ihr vertheilten Gewichten belastet und durch einen festen Punkt in der Mitte unterstützt; dann ist das System natürlich im Gleichgewichte. Nehmen wir von dem einen Endpunkte der Linie aus, deren Länge $2a$ sei, ein Stück von der Länge $2h$ ab; so dürfen wir, ohne das Gleichgewicht aufzuheben, die belastenden Gewichte in der Mitte der beiden Theile $2h$ und $2a-2h$ vereinigen; man hat alsdann einen Hebel, dessen Arme, $=a-h$ und h, an ihren Endpunkten Gewichte tragen, die resp. h und $a-h$ proportional sind.

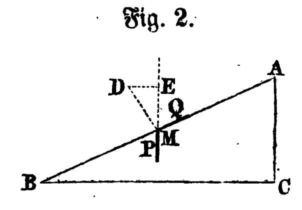
§. 6. Der vorhergehende Satz kann auch leicht auf den Fall ausgedehnt werden, daß die beiden Arme des Hebels nicht in gerader Linie liegen. Allgemein ausgedrückt halten sich zwei in derselben Ebene wirkende Kräfte um einen Punkt einander das Gleichgewicht, wenn sie sich umgekehrt wie die Längen der vom festen Punkte auf ihre Richtungen gefällten Lothe verhalten. Das Produkt aus einer Kraft in die Länge des von einem festen Punkte auf ihre Richtung gefällten Lothes ist das Maß der Wirksamkeit dieser Kraft beim Drehen des Systems um den festen Punkt. Man nennt dieses Product das **Moment** der Kraft.

§. 7. Das **Grundgesetz von der geneigten Ebene** ist folgendes: Wenn ein Gewicht auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegt und durch eine der Ebene parallel wirkende Kraft zurückgehalten wird; so tritt dann Gleichgewicht ein, wenn sich das Gewicht zu der Kraft verhält, wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe. Dieses Prinzip wurde von Stevin bewiesen, indem er beachtete, daß

eine schwere Kette ohne Ende, die um ein festes auf seiner horizontalen Basis ruhendes Dreieck gelegt war, nothwendig sich in Ruhe halten muß. Es ist aber der untere Theil, der unter der Basis des Dreieckes hängt, im Gleichgewichte: folglich müssen die beiden auf den geneigten Seiten des Dreiecks ruhenden Theile gleichfalls im Gleichgewichte stehen; und hieraus schließt man auf die Richtigkeit des obigen Grundgesetzes.

§. 8. Den voranstehenden Satz kann man dazu benutzen das Gesetz des Gleichgewichts beim Hebel nachzuweisen. Wenn der materielle Punkt M, der auf der geneigten Ebene AB liegt, Fig. 2, durch die vertikal wirkende Kraft P und die der Ebene parallel wirkende Kraft Q angegriffen wird; so tritt Gleichgewicht ein, wenn die Kräfte sich wie die Linien AB und AC verhalten. Legen wir die unbiegsame um den festen Punkt D drehbare Linie DM senkrecht gegen AB, so wird das Gleichgewicht offenbar nicht gestört; denken wir uns ferner die geneigte Ebene weggenommen, so wird doch noch Gleichgewicht bestehen; denn die Wirkung dieser Ebene bestand darin allein, daß der materielle Punkt sich nicht nach anderer Richtung, als nur längs der von AB bewegen konnte und dieselbe Wirkung wird durch die Linie DM hervorgebracht. Dann wirken die Kräfte P und Q auf einen Hebel, dessen fester Punkt D, dessen Hebelarme die Linien DE und DM sind, welche sich verhalten wie AC zu AB, d. h. umgekehrt wie die Kräfte.

Fig. 2.

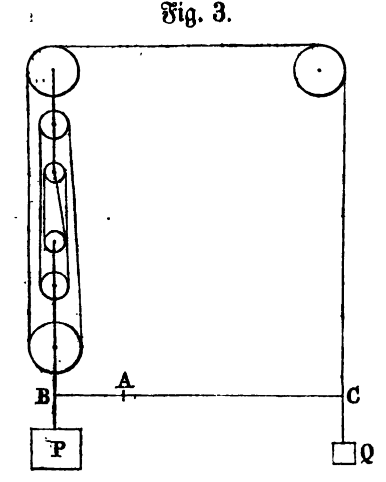


§. 9. Das Grundgesetz vom Flaschenzuge kann gleichfalls als Grundlage für die Theorie der Statik dienen: Wird ein Gewicht P durch einen beweglichen Flaschenzug

getragen, an welchem n unter einander parallele Seile angebracht sind; so ist die am Ende des letzten Seiles wirkende Kraft $= \frac{P}{n}$, sobald das System im Gleichgewichte ist. Dies Resultat folgt augenscheinlich daraus, daß die Spannung des Seiles in seiner ganzen Ausdehnung gleichförmig sein muß.

§. 10. Das Prinzip vom Hebel kann folgendermaßen daraus hergeleitet werden: der Hebel BAC, Fig. 3, dessen Unterstützungspunkt A so liegt, daß sich BA zu CA verhält, wie 1 zu der Zahl der Seile, die das Gewicht P tragen, sei so an dem Flaschenzuge befestigt, daß die Endpunkte des Hebels, B und C, mit den entsprechenden Punkten des Seiles vereinigt sind. Die Vereinigung der Systeme des Hebels und des Flaschenzuges bildet offenbar ein zusammengesetztes System, in welchem die Punkte B und C dieselben unendlich kleinen Verschiebungen erleiden können, wie wenn jedes System allein wäre. Ist daher jedes der beiden Systeme im Gleichgewicht oder unter Einwirkung beliebiger Kräfte nicht im Gleichgewicht; so ist auch das zusammengesetzte System im Gleichgewichte oder unter Einwirkung derselben Kräfte nicht im Gleichgewichte.

Fig. 3.

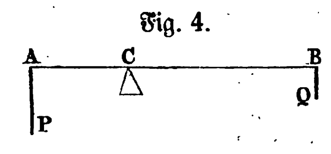


Denken wir nun ferner uns dies System ohne die darauf wirkenden Kräfte und bringen dann sowohl am Punkte B, als auch an C ein Paar von je einander gleichen

und entgegengesetzten, nach Richtung des Seiles ziehenden Kräften an, so daß wir die an C wirkenden Kräfte gegen die an B angebrachten so vielmal kleiner annehmen, als die Zahl der Seile beträgt; so ist das System augenscheinlich im Gleichgewichte, weil man nur je zwei sich gegenseitig aufhebende Kräfte angebracht hat. Weil aber die beiden nach unten ziehenden Kräfte an B und C sich wegen des Flaschenzuges allein einander das Gleichgewicht halten, kann man ohne das Gleichgewicht zu stören diese Kräfte wegnehmen. Folglich müssen die bleibenden, aufwärtsziehenden Kräfte sich am Hebel allein das Gleichgewicht halten, weil die Vereinigung von Flaschenzug und Hebel da nicht Gleichgewicht begründen kann, wo es nicht schon besteht.

§. 11. Mit Hülfe des Prinzips vom Hebel kann man zwei Parallelkräfte vereinigen, d. h. eine resultierende Kraft finden, welche auf ein System ebenso wirkt, wie zwei gegebene parallele Kräfte. Wenn die beiden parallelen Kräfte P und Q an den beiden Endpunkten der unbiegsamen Linie AB angebracht sind, Fig. 4; so weiß man aus dem obigen, daß die Wirkung dieser Kräfte gänzlich aufgehoben wird, wenn man die Linie in dem Punkte C unterstützt, der so liegt, daß $\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$; ferner weiß man,

Fig. 4.

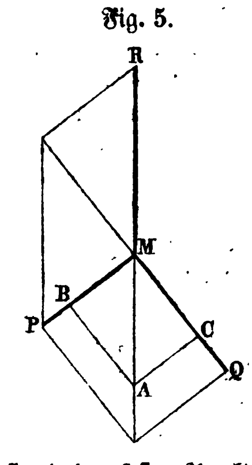


daß dieser feste Punkt den der Richtung der Kräfte parallel wirkenden Druck $P + Q$ zu tragen hat. Man hebt demgemäß die Wirkung der beiden Kräfte P und Q auf, wenn man am Punkte C nach der Richtung, die der der Kräfte entgegengesetzt ist, eine ihrer Summe $P + Q$ gleiche Kraft anbringt. Die Wirkung der beiden Kräfte auf die Linie ist demnach dieselbe, wie die einer Kraft, die der Summe derselben gleich, auf den Punkt der Linie wirkt,

der sie in zwei den Kräften umgekehrt proportionale Stücke theilt.

§. 12. Aus dem Gleichgewicht des Hebels ergiebt sich unmittelbar das mehrerer auf einen materiellen Punkt wirkender Kräfte. Es möge Gleichgewicht bestehen, wenn die drei in derselben Ebene enthaltenen Kräfte P, Q, R, Fig. 5, auf den Punkt M wirken. Nehmen wir nun auf der Verlängerung von R einen beliebigen Punkt A an, von dem aus wir die Lothe BA und CA auf die Richtungen der Kräfte P und Q fällen; so dürfen wir BAC als einen Hebel ansehen, dessen fester Punkt in A ist. Denken wir uns diesen Hebel unveränderlich mit dem gegebenen Systeme vereinigt, so wird das Gleichgewicht dieses Systemes nicht gestört werden. Dann darf man die Kraft R aus dem System weglassen, weil sie durch den Widerstand des festen Punktes A aufgehoben wird, und die beiden bleibenden Kräfte halten sich am Hebel BAC das Gleichgewicht. Hieraus folgt, daß die Linien AB und AC sich umgekehrt verhalten müssen, wie die beiden Kräfte P und Q und dies kann nur dann eintreten, wenn die Richtung der Kraft R mit der Diagonale des Parallelogramms zusammenfällt, das aus den der Größe und Richtung nach die Kräfte P und Q repräsentierenden Linien construiert ist. Ebenso sieht man, daß die Kraft Q nach Richtung der Diagonale des Parallelogramms wirken muß, welches aus den die Kräfte P und R darstellenden Linien construiert ist. Es läßt sich hieraus leicht folgern, daß jede der drei Kräfte ihrer Größe und Richtung nach durch die Diagonale des

Fig. 5.



Parallelogramms repräsentiert wird, das man aus den die beiden andern Kräfte darstellenden Linien construiert.

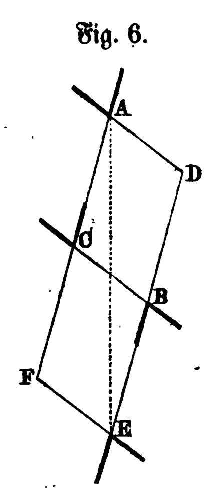
Man sieht auch, daß drei auf einen Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewichtszustande sich wie die Seiten eines Dreiecks verhalten, das aus drei den Richtungen der Kräfte parallelen Linien gebildet ist und daß die Kräfte jedesmal den Sinus der zwischen den Richtungslinien der beiden andern enthaltenen Winkel porportional sind.

§. 13. Man könnte den voranstehenden Satz ebensowohl aus dem Grundgesetze von der geneigten Ebene herleiten (s. §. 8). Weil die Kräfte P und Q sich um den als fest angenommenen Punkt D das Gleichgewicht halten, liegt dieser Punkt auf der Richtung der Kraft, welche ihnen das Gleichgewicht halten könnte. Nun sind die vom Punkte D auf die Richtungen der beiden Kräfte gefällten Lothe diesen umgekehrt proportional; deshalb gehört dieser Punkt der Diagonale des Parallelogramms an, das aus den jene Kräfte repräsentierenden Linien gebildet ist.

§. 14. Aus dem Voranstehenden folgt unmittelbar das Grundgesetz von der Zusammensetzung der Kräfte, die auf einen materiellen Punkt wirken. Die resultierende Wirkung zweier Kräfte wird nach Größe und Richtung durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, das aus den die Componierenden darstellenden Linien construiert ist. Eine dieser Resultierenden gleiche und entgegengesetzte Kraft hebt die Wirkung der beiden gegebenen Kräfte auf.

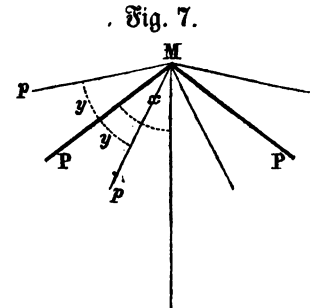
Dies Prinzip kann direct bewiesen werden; aber meist führen die Beweise auf die Betrachtung des Grenzwerthes oder des unendlich Kleinen. Wir wollen hier einen der einfachsten einfügen. Wenn an dem Rhombus $ABCD$, Fig. 6, an den Winkeln A und B und zwar nach Richtung der Verlängerung ihrer Schenkel vier gleiche Kräfte wirken,

Fig. 6.



so wird das System offenbar im Gleichgewicht sein. Setzt man das zweite, auf dieselbe Weise im Gleichgewicht stehende System $BCEF$ an dasselbe; so muß das Gleichgewicht fortbestehen, wenn man beide Systeme vereinigt denkt. Man kann ferner ohne das Gleichgewicht zu stören die sich gegenseitig aufhebenden Kräfte aus dem Systeme weglassen und die beiden andern an B und C angebrachten Kräfte durch zwei in derselben Richtung an A und E wirkende ersetzen, wo sie zu den dort angebrachten addiert werden müssen. Die Resultierende dieser nun an den beiden Punkten A und E angebrachten Kräfte muß nach Richtung der Diagonale AE wirken. Daß die Richtung der Resultierenden mit der Diagonale des Parallelogramms zusammenfällt, ist damit für den Fall bewiesen, daß die gegebenen Kräfte sich wie 1 zu 2 verhalten; dasselbe Resultat kann man jedoch durch Fortsetzung dieser Schlüsse für jedes andere Verhältniß der Kräfte, sobald als es nur durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann, erreichen und somit kann man leicht den Schluß auf die Wahrheit des Prinzips in allen Fällen machen.

Fig. 7.



§. 15. Auf folgende Art kann man auch einen rein analytischen Beweis des Prinzips von der Zusammensetzung der Kräfte geben. Fig. 7.

Wir denken uns, daß auf den Punkt M zwei gleiche Kräfte P wirken, deren Richtungen mit

einander den Winkel $2x$ bilden. Die Resultierende R dieser beiden Kräfte P fällt natürlich in die Ebene jener Kräfte und nach Richtung der Linie, welche den Winkel $2x$ in zwei gleiche Theile theilt. Ferner steht die Größe dieser Resultierenden stets zu der der Kräfte P in einem bestimmten Verhältnisse. Man darf darum schreiben:

$$R = P.f(x),$$

wo $f(x)$ eine bis dahin unbekannte Function des Winkels x bezeichnet. Betrachten wir ferner jede der Kräfte P als Resultierende zweier gleicher Kräfte p, deren Richtungen mit denen von P den Winkel y bilden, so ist wiederum

$$P = p.f(y) \quad \text{oder} \quad R = p.f(x).f(y).$$

Da ferner das System der beiden Kräfte P durch das der vier Kräfte p ersetzt werden kann; so darf die Resultierende R als die Summe der Resultierenden angesehen werden, welche 1) zu den beiden Kräften p gehören, die mit einander den Winkel $2(x+y)$, 2) zu den beiden p, welche mit einander den Winkel $2(x-y)$ bilden. Es ist daher auch

$$R = p.f(x+y) + p.f(x-y).$$

Durch Gleichsetzung beider Werthe von R erhält man:

$$f(x).f(y) = f(x+y) + f(x-y) \qquad \text{(a.)}$$

Dieser Gleichung muß die durch f bezeichnete Function Genüge leisten und aus ihr erkennt man die Natur dieser Function. Differentiiert man zweimal hinter einander in Beziehung auf die Veränderliche y, so erhält man:

$$f(x).f'(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$$
$$f(x).f''(y) = f''(x+y) + f''(x-y);$$

und setzt man hierin $y = 0$:

$$f(x).f(0) = 2f(x), \quad \text{daher } f(0) = 2$$
$$f(x).f'(0) = 0 \quad , \quad \text{"} \quad f'(0) = 0$$
$$f(x).f''(0) = 2f''(x), \quad \text{"} \quad \lambda^2 f(x) = f''(x);$$

λ^2 bezeichnet hier eine bisjetzt unbestimmte Constante, der

man beliebig das Vorzeichen $+$ oder $-$ geben kann. Es ist also der Reihe nach:

$$f''(x)=\pm\lambda^2 f\ (x),\ \text{daher}\ f''(0)=\pm\lambda^2 f\ (0)=\pm 2\lambda^2$$
$$f'''(x)=\pm\lambda^2 f'\ (x),\qquad f'''(0)=\pm\lambda^2 f'\ (0)=0$$
$$f^{IV}(x)=\pm\lambda^2 f''\ (x),\qquad f^{IV}(0)=\pm\lambda^2 f''\ (0)=+2\lambda^4$$
$$f^{V}(x)=\pm\lambda^2 f'''(x),\qquad f^{V}(0)=\pm\lambda^2 f'''(0)=0$$
$$f^{VI}(x)=\pm\lambda^2 f^{IV}(x),\qquad f^{VI}(0)=\pm\lambda^2 f^{IV}(0)=\pm 2\lambda^6$$

u. s. w.

Entwickelt man folglich $f(x)$ nach der Maclaurinschen Reihe, so erhält man:

$$f(x)=2\left(1\pm\frac{\lambda^2x^2}{2}+\frac{\lambda^4x^4}{2.3.4}\pm\frac{\lambda^6x^6}{2.3.4.5.6}+\ldots..\right).$$

Nimmt man die obern Vorzeichen, so ist:

$$f(x)=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x};$$

nimmt man die untern Vorzeichen, so ist:

$$f(x)=2\cos.\lambda x.$$

Beide Resultate leisten der Gleichung (a) Genüge. Das erste ist jedoch in unserm Falle nicht zu gebrauchen, weil es, wenn man der Veränderlichen x einen von 0 sehr wenig verschiedenen Werth ertheilt, für $f(x)$ einen Werth >2 ergiebt, wornach $R>2P$ würde, was unmöglich ist.

Daher ist die Formel:

$$R=2P\cos.\lambda x$$

nothwendig der Ausdruck für die aus den beiden Kräften P resultierende R, wenn dieselben den Winkel $2x$ einschließen. Es muß noch die unbestimmte Constante λ bestimmt werden. Setzt man $x=\frac{\pi}{2}$, so ist $R=0$, weil die Kräfte P alsdann einander direkt entgegengesetzt wirken. Folglich ist $0=\cos.\lambda\frac{\pi}{2}$ und demnach $\lambda=2i+1$; ferner muß man auch $i=0$ setzen, weil sonst die Resultierende auch dann $=0$

sein würde, wenn die beiden Kräfte mit einander den spitzen Winkel $\frac{\pi}{2i+1}$ bildeten. So gewinnt man als Endresultat:

$$R = 2 \,.\, P \,.\, \cos. x$$

dem in §. 14 bewiesenen Prinzipe gemäß. Von dem Falle, daß beide Kräfte gleich sind, kann man leicht auf den übergehen, daß zwei ungleiche Kräfte senkrecht gegen einander wirken, dann auf den allgemeinsten, daß zwei ungleiche Kräfte einen beliebigen Winkel einschließen.

§. 16. Aus dem Prinzipe von der Zusammensetzung der Kräfte ergeben sich unmittelbar einige Formeln, die man wohl thut sich einzuprägen. Sind P und Q zwei gegebene Kräfte und R ihre Resultierende, so ist:

$$R = P \cos. \alpha + Q \cos. \beta$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 P \,.\, Q \,.\, \cos. (\alpha + \beta),$$

$$\sin. \alpha = \frac{Q}{R} \sin. (\alpha + \beta), \quad \sin. \beta = \frac{P}{R} \sin. (\alpha + \beta)$$

α und β sind die zwischen der Richtung der Resultierenden R und resp. den Richtungen der Kräfte P und Q liegenden Winkel; $\alpha + \beta$ ist der zwischen den Richtungen der gegebenen Kräfte P und Q liegende Winkel.

Die beiden letzten Gleichungen dienen dazu, eine gegebene Kraft R in zwei andere P und Q nach Richtung gegebener Linien zu zerlegen. Man leitet daraus ab:

$$P = R \frac{\sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} \text{ und } Q = R \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}$$

II. Zusammensetzung und Gleichgewicht mehrerer auf einen materiellen Punkt wirkender Kräfte.

§. 17. Man erhält leicht die mehreren auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräften gemeinsame Resultierende dadurch, daß man zuerst die Resultierende der zwei ersten sucht, dieselbe mit der dritten Kraft zusammensetzt u. s. f. Die Resultierende dreier Kräfte wird durch die Diagonale des Parallelepipedums dargestellt, das aus den die Kräfte repräsentierenden Linien construiert ist.

Zeichnet man im Raume einen polygonalen Umriß aus geraden Linien, die den gegebenen Kräften parallel und proportional sind; so stellt die den Umriß durch Vollendung des Polygons schließende Linie ihrer Größe und Richtung nach die Resultierende dar.

Sind die gegebenen Kräfte in einer Ebene enthalten, so liegt auch die Richtung der Resultierenden in derselben Ebene.

Das System der gegebenen Kräfte ist im Gleichgewicht, wenn die Resultierende $= 0$ ist. Jede der sich einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte ist daher gleich und entgegengesetzt der Resultierenden aller andern.

§. 18. Die auf Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte bezüglichen Operationen lassen sich leicht mit Hülfe der in der analytischen Geometrie gegebenen Formeln ins Werk setzen.

Der einfachste Fall ist der, daß die Richtungen der Kräfte in derselben Ebene enthalten sind. In Fig. 8. sei A der durch die Kräfte angegriffene Punkt. Wenn wir nun zwei senkrecht auf einander stehende Axen Ax und Ay festlegen, eine auf dem Punkt A wirkende Kraft mit P, und den Winkel, den die Richtung der Kraft mit dem Theile

Fig. 8.

der Axe Ax, auf dem man die positiven Coordinaten zählt, einschließt, mit α bezeichnen; so ist die Kraft P völlig bestimmt, wenn ihr Werth in Gewichtseinheiten und der Winkel α gegeben sind. Man erkennt aus den Vorzeichen des Sinus und des Cosinus dieses Winkels, nach welcher Seite hin die Kraft wirkt, nämlich ob sie den Punkt A nach der Seite, wo die positiven Abscissen und Ordinaten liegen oder nach der entgegengesetzten Richtung hinzieht.

Die Kraft P kann durch ihre beiden nach Richtung der Axen Ax und Ay wirkenden Componierenden ersetzt werden, deren Werthe bezüglich $P\sin.\alpha$ und $P\cos.\alpha$ sind. Bezeichnet man mit $S.P\cos.\alpha$ und $S.P\sin.\alpha$ die Summe der Componierenden mehrerer auf den Punkt A wirkender Kräfte und mit R die Resultierende aller dieser Kräfte; nennt man ferner den Winkel, den die Richtung der R mit der Axe der x bildet, a; so ist offenbar

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\sin.\alpha)^2},$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R}, \quad \sin.a = \frac{S.P\sin.\alpha}{R}.$$

§. 19. Sind die gegebenen Kräfte P im Gleichgewichte, so ist $R=0$; dies zwingt uns die beiden Gleichungen aufzustellen

$$S.P\cos.\alpha = 0 \text{ und } S.P\sin.\alpha = 0.$$

§. 20. Der weitere uns zur Untersuchung vorliegende Fall ist der, wo die auf den Punkt A wirkenden Kräfte beliebige Richtungen im Raume haben. Dabei wollen wir stets voraussetzen, daß jede Kraft nach ihrer Richtung hin den Punkt A zu ziehen strebt. Wenn wir durch A die drei gegen einander lothrechten Axen Ax, Ay, Az hindurch-

legen und die Winkel, welche die Richtung der Kraft P mit dem Theile dieser Axen einschließt, auf dem man die positiven Coordinaten zählt, mit α, β und γ bezeichnen; so kann jede Kraft P durch ihre drei Componierenden nach Richtung der Axen Ax, Ay und Az ersetzt werden und diese sind bezüglich $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$ und $P\cos.\gamma$. Wenn folglich R die Resultierende aller Kräfte P ist, und a, b und c die Winkel sind, welche die Richtung von R mit den Axen Ax, Ay und Az einschließt; so ist:

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\cos.\beta)^2 + (S.P\cos.\gamma)^2},$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R}, \quad \cos.b = \frac{S.P\cos.\beta}{R}, \quad \cos.c = \frac{S.P\cos.\gamma}{R}.$$

Aus den Vorzeichen dieser Cosinus kann man die Richtung erkennen, nach welcher die Resultierende wirkt. Ist $\cos.a$ positiv, so zieht die Kraft A nach der Seite der positiven x hin; ebenso bei $\cos.b$ und $\cos.c$.

§. 21. Wenn man die drei letzten Gleichungen beziehungsweise mit den $\cos.\lambda$, $\cos.\mu$ und $\cos.\nu$ der Winkel λ, μ und ν, die eine gerade Linie mit den Axen der x, y und z bildet, multiplicirt und sie dann addiert; so ist:

$$R.(\cos.a.\cos.\lambda + \cos.b.\cos.\mu + \cos.c.\cos.\nu)$$
$$= S.P(\cos.\alpha.\cos.\lambda + \cos.\beta.\cos.\mu + \cos.\gamma.\cos.\nu).$$

Hieraus schließt man, daß die Projection der Resultierenden auf einer beliebigen Linie gleich ist der Summe der Projectionen ihrer Componierenden auf derselben Linie.

Die Summe der Projectionen der Componierenden auf einer beliebigen auf der Richtung der Resultierenden senkrechten Linie ist nothwendig $= 0$.

§. 22. Für den Fall, daß Gleichgewicht besteht, daß also die Resultierende $R=0$ ist, muß man die drei Gleichungen haben:

$$S.P\cos.\alpha = 0, \quad S.P\cos.\beta = 0, \quad S.P\cos.\gamma = 0.$$

Im allgemeinen kann ein materieller Punkt nur dann im Gleichgewicht bleiben, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte auf einer beliebigen Linie projiciert die Summe 0 geben.

Gleichgewicht eines materiellen Punktes, der gezwungen ist auf einer gegebenen krummen Linie oder Fläche zu bleiben.

§. 23. Wir nehmen zunächst an, der Punkt M sei gezwungen sich auf einer in einer Ebene liegenden Curve mn (Fig. 9) zu bewegen, indem mehrere in derselben Ebene enthaltene Kräfte auf ihn wirken. Man bezeichnet, wie in §. 18, den Werth einer dieser Kräfte durch P, den zwischen ihrer Richtung und der Axe der x liegenden Winkel durch α; sollen sich die Kräfte P hier das Gleichgewicht halten, so muß die Resultierende dieser Kräfte nach Richtung der im Punkte M auf die Curve gezogenen Normale wirken. Denn die Wirkung dieser Resultierenden wird dann völlig durch den Widerstand der Curve aufgehoben und sie kann darum dem materiellen Punkte keinerlei Bewegung ertheilen. Nennt man also, wie oben, die Resultierende der Kräfte P, R, den Winkel, den die Richtung derselben mit der Axe der x bildet, a; so drücken die folgenden Gleichungen die Bedingungen aus, für welche Gleichgewicht besteht, da, sobald die Curve auf die senkrechten Coordinaten x und y bezogen ist, die im Punkte M an die Curve gezogene Tangente mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{dy}{dx}$ ist:

Fig. 9.

$$\frac{\sin.a}{\cos.a} = \frac{S.P\sin.\alpha}{S.P\cos.\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{oder} \quad \frac{S.P\cos.\alpha}{S.P\sin.\alpha} = -\frac{dy}{dx}.$$

Wird dieser Gleichung Genüge geleistet, so geben die Ausdrücke für R und für $\cos.a$ und $\sin.a$ in §. 18 den Werth des von der Curve ertragenen Drucks und die Richtung desselben, weil man aus den Vorzeichen von $\cos.a$ und $\sin.a$ erkennen kann, ob dieser Winkel zu dem Theile MN oder dem MN' der Normale gehört.

§. 24. Es sei zweitens der Punkt M gezwungen sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, indem mehrere Kräfte von beliebiger Richtung her auf ihn wirken. Behalten wir die in §. 20 gewählten Bezeichnungen bei und nehmen an, daß die Gestalt der Fläche durch eine Gleichung gegeben sei, in welcher die verticale Ordinate z als Funktion der beiden horizontalen x und y dargestellt ist; so tritt dann Gleichgewicht ein, wenn die Resultierende R der Kräfte P nach Richtung der Normalen auf diese Fläche wirkt. Nach den Formeln, die für die Cosinus der durch die Richtung der Normalen mit den Axen der x, y und z gebildeten Winkel in I. §. 217 des Lehrbuchs der Different. und Integr. Rechnung gegeben sind, drückt man die Bedingungen des Gleichgewichts durch die Gleichungen aus:

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos.b = \frac{S.P\cos.\beta}{R} = -\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos.c = \frac{S.P\cos.\gamma}{R} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

Diese Gleichungen kann man auf die beiden folgenden zurückführen:

$$\frac{S.P.\cos.\alpha}{S.P.\cos.\gamma} = -\frac{dz}{dx} \text{ und } \frac{S.P\cos.\beta}{S.P\cos.\gamma} = -\frac{dz}{dy}.$$

Ist diesen Gleichungen Genüge geleistet, so lassen die für R und für $\cos.a$, $\cos.b$ und $\cos.c$ in §. 20 gegebenen Formeln den auf die Fläche wirkenden Druck und die Richtung, nach welcher er wirkt, erkennen.

§. 25. Ist die Gleichung der gegebenen Fläche unter der Form

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben, so ist aus I. §. 218 des Lehrb. der Diff. und Int. Rechnung ersichtlich, daß die Bedingungen des Gleichgewichts durch je zwei der drei Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\frac{dF}{dy}.S.P\cos.\alpha = \frac{dF}{dx}.S.P\cos.\beta,\ \frac{dF}{dz}.S.P\cos.\alpha = \frac{dF}{dx}.S.P\cos.\gamma;$$

$$\frac{dF}{dz}.S.P\cos.\beta = \frac{dF}{dy}.S.P\cos.\gamma.$$

§. 26. Es bleibt uns drittens der Fall zu untersuchen, daß der von den Kräften P angegriffene Punkt M gezwungen ist auf einer beliebig im Raume liegenden Curve zu bleiben. Es sei die Curve durch zwei Gleichungen zwischen y und x, und z und x gegeben, wobei die Abscisse x als die unabhängige Veränderliche angenommen sei. Der Punkt M kann natürlich nur dann im Gleichgewicht sein, wenn die Resultierende der auf ihn wirkenden Kräfte P senkrecht gegen die Tangente der Curve gerichtet ist; ist dies der Fall, so muß nothwendig auch Gleichgewicht bestehen. Gemäß den in I. §. 223 der Diff. Rechn. gegebenen Formeln für die Cosinus der durch die Tangente der Curve mit den Axen der x, y und z gebildeten Winkel drückt man also die Bedingungen des Gleichgewichts durch die Gleichung aus

$$\cos.a + \frac{dy}{dx}\cos.b + \frac{dz}{dx}\cos.c = 0,$$

und demnach:

$$S.P\cos.\alpha + \frac{dy}{dx}.S.P\cos.\beta + \frac{dz}{dx}.S.P\cos.\gamma = 0.$$

Wird dieser Gleichung Genüge geleistet, so geben die Formeln für R und für $\cos.a$, $\cos.b$ und $\cos.c$ in §. 20 den auf die Curve geübten Druck und die Richtung desselben.

§. 27. Ist die Curve durch die beiden Gleichungen gegeben

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

die zu zwei Flächen gehören, deren Durchschnittslinie diese Curve ist; so ergiebt sich aus I. §. 229 der Diff. Rechn., daß diese Gleichung die Bedingungen des Gleichgewichts ausdrückt:

$$\left(\frac{dF}{dy}.\frac{df}{dz} - \frac{df}{dy}.\frac{dF}{dz}\right)S.P\cos.\alpha + \left(\frac{df}{dx}.\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dx}.\frac{df}{dz}\right)S.P\cos.\beta$$
$$+ \left(\frac{dF}{dx}.\frac{df}{dy} - \frac{df}{dx}.\frac{dF}{dy}\right)S.P\cos.\gamma = 0.$$

Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten beim Gleichgewichtszustande eines materiellen Punkts.

§. 28. Folgendes ist das Grundgesetz der virtuellen Geschwindigkeiten beim Gleichgewichtszustande eines einzigen materiellen Punkts: Der Punkt M, welcher der Einwirkung mehrerer von beliebigen Seiten her wirkender Kräfte unterliegt, verändere seinen Ort und beschreibe nach beliebiger Richtung hin eine unendlich kleine gerade Linie, deren Länge wir durch δs bezeichnen, wo δ ein Differentiationszeichen ist. Wenn wir nun diese Linie δs auf die Richtungen der Kräfte P projicieren; so ist jede Projection das Maß des Weges, den der Punkt M auf der Richtung jeder Kraft durchlaufen hat. Wir nennen das Product der Kraft P in den nach ihrer Richtung hin durchlaufenen Raum das Moment dieser

Kraft und sehen das Product als positiv an, wenn der durchlaufene Raum nach derselben Richtung sich erstreckt, nach welcher hin die Kraft den materiellen Punkt zu ziehen strebt, und als negativ, wenn dieser Raum sich nach der entgegengesetzten Richtung hin erstreckt. Unter dieser Voraussetzung ist unser Satz folgender: der Punkt M kann nur dann im Gleichgewichte sein, wenn die Summe der Momente der Kräfte P beständig $= 0$ ist, nach welcher Richtung hin sich der Punkt auch bewege; umgekehrt besteht nothwendig Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente der Kräfte für alle möglichen Verschiebungen des materiellen Punkts $= 0$ ist.

Man darf nicht übersehen, daß, wenn ein völlig freier Punkt in Frage kommt, die Richtung der unendlich kleinen Linie δs völlig willkührlich ist. Aber handelt es sich um einen materiellen Punkt, der auf einer gegebenen Fläche zu bleiben gezwungen ist, so kann die Linie δs nur in der Berührungsebene dieser Fläche liegen; und wenn der materielle Punkt gezwungen ist auf einer gegebenen Curve zu bleiben, so kann die Linie δs nur nach Richtung der Tangente dieser Curve sich hin erstrecken.

§. 29. Um diesen wichtigen Satz zu beweisen genügt es den materiellen Punkt nach Richtung der beliebigen Linie zu verschieben, welche die Winkel λ, μ und ν mit den Axen der x, y und z einschließt; wenn man beide Seiten der in §. 21 gegebenen Gleichung mit δs multipliciert, erhält man demnach:

$$R\delta s(\cos.a\,.\cos.\lambda + \cos.b\,.\cos.\mu + \cos.c\,.\cos.\nu)$$
$$= S.P\delta s(\cos.\alpha\,.\cos.\lambda + \cos.\beta\,.\cos.\mu + \cos.\gamma\,.\cos.\nu).$$

Die Größe $\delta s(\cos.\alpha.\cos.\lambda + \cos.\beta.\cos.\mu + \cos.\gamma.\cos.\nu)$ ist die Projection von δs auf der Richtung der Kraft P und die Größe $\delta s(\cos.a\,.\cos.\lambda + \cos.b\,.\cos.\mu + \cos.c\,.\cos.\gamma)$ ist die Projection von δs auf der Richtung der Resultierenden

R; allgemein ausgedrückt liegt also in dieser Gleichung folgender Satz: das Moment der Resultierenden mehrerer auf einen materiellen Punkt wirkender Kräfte ist gleich der Summe der Momente der Componierenden.

Aber wenn der materielle Punkt sich im Gleichgewichte befindet, so ist $R = 0$, falls er völlig frei ist; andererseits ist:

$$\cos.a \,.\, \cos.\lambda + \cos.b \,.\, \cos.\mu + \cos.c \,.\, \cos.\nu = 0,$$

wenn der Punkt gezwungen ist sich auf einer gegeben Fläche oder Linie zu bewegen, indem die Richtung der Resultierenden dann nothwendig senkrecht gegen die Fläche oder Linie sein muß. In allen Fällen, wo ein materieller Punkt im Gleichgewichte ist, hat man also

$$S.P.\delta s(\cos.\alpha \,.\, \cos.\lambda + \cos.\beta \,.\, \cos.\mu + \cos.\gamma \,.\, \cos.\nu) = 0;$$

und umgekehrt ist er im Gleichgewichte, wenn diese Gleichung aufgestellt werden kann.

§. 30. Wir wollen in dem Folgenden die Projection des durch den materiellen Punkt durchlaufenen Weges δs auf der Richtung der Kraft P durch δp, und die Projection von δs auf der Richtung der Resultierenden R durch δr bezeichnen; es ist also:

$$\delta p = \delta s(\cos.\alpha \,.\, \cos.\lambda + \cos.\beta \,.\, \cos.\mu + \cos.\gamma \,.\, \cos.\nu),$$
$$\delta r = \delta s(\cos.a \,.\, \cos.\lambda + \cos.b \,.\, \cos.\mu + \cos.c \,.\, \cos.\nu).$$

Die Gleichung, welche das Moment der Resultierenden der Summe der Momente der Componierenden gleichsetzt, bekommt so die Gestalt

$$R\delta r = S.P\delta p,$$

und die Gleichung

$$S.P\delta p = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (A)$$

drückt die Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte P aus. Da man in diesen Gleichungen p und r als Bezeichnungen für die Entfernungen des materiellen Punktes von gewissen festen auf der Richtung der Kräfte P und R

angenommenen Punkten ansieht, und da diese Entfernungen Functionen der Coordinaten x, y, z des Punktes m sind; so stellen die unendlich kleinen Größen δp und δr die Variationen der Entfernungen p und r dar, die sich bilden, wenn der Punkt M um das unendlich kleine Stück δs verschoben wird; und diese Verschiebung entspricht wieder den Variationen δx, δy und δz der Coordinaten dieses Punktes. Ebenso sind die Werthe der Kräfte P im allgemeinen als Functionen der Coordinaten x, y und z gegeben, welche der jedesmaligen Lage des materiellen Punktes angehören.

Man erkennt übrigens leicht, daß die Gleichung (A) allein völlig genügt die in §. 19 und den folgenden entwickelten Bedingungen des Gleichgewichts zu geben, wenn man nur, sobald der materielle Punkt nicht völlig frei ist, die Bedingungen der Verschiebung desselben damit verbindet.

Da nämlich δp die Projection von δs auf der Richtung der Kraft P ist; so folgt, daß

$$\delta p = \delta s(\cos.\lambda\,.\cos.\alpha + \cos.\mu\,.\cos.\beta + \cos.\nu\,.\cos.\gamma).$$

Es ist nun aber:

$$\delta s\,.\cos.\lambda = \delta x,\quad \delta s\,.\cos.\mu = \delta y,\quad \delta s\,.\cos.\nu = \delta z;$$

und daraus erhält man

$$\delta p = \delta x\,.\cos.\alpha + \delta y\,.\cos.\beta + \delta z\,.\cos.\gamma.$$

Die Gleichung (A) läßt sich also auch so schreiben:

$$S.P.(\delta x\,.\cos.\alpha + \delta y\,.\cos.\beta + \delta z\,.\cos.\gamma) = 0$$

oder auch so:

$$\delta x.S.P.\cos.\alpha + \delta y.S.P.\cos.\beta + \delta z.S.P.\cos.\gamma = 0 \quad \text{(a)}$$

Nehmen wir nun zunächst an, daß der materielle Punkt, auf welchen die Kräfte P wirken, völlig frei ist; so sind die drei Variationen δx, δy und δz seiner Coordinaten, welche einer möglichen Verschiebung dieses Punktes ange=

hören, völlig willkührlich. Deshalb kann der Gleichung (a) nur dann völlig Genüge geleistet werden, wenn einzeln

$$S.P.\cos.\alpha = 0,\quad S.P.\cos.\beta = 0,\quad S.P.\cos.\gamma = 0.$$

Dies sind die drei Gleichungen für das Gleichgewicht eines freien materiellen Punktes, welche in §. 22 entwickelt sind.

Wenn zweitens ein materieller Punkt gezwungen ist, sich auf einer Fläche zu bewegen, deren Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

ist, welcher die drei Coordinaten des Punktes Genüge leisten müssen; so kann das Verhältniß der Variationen δx, δy und δz zu einander aus dieser Gleichung durch Differentiierung abgeleitet werden, indem man δx, δy, δz statt dx, dy, dz schreibt. So erhält man

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0.$$

Setzt man den für eine dieser Variationen δx, δy, δz aus dieser Gleichung gewonnenen Werth in die Gleichung (a) und setzt man einzeln die Ausdrücke, welche die beiden andern willkührlich bleibenden Variationen enthalten, $= 0$; so ergeben sich wieder die in §. 25 gefundenen Gleichungen.

Wenn endlich der materielle Punkt gezwungen ist sich auf einer Curve zu bewegen, welche durch die Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0,\quad f(x, y, z) = 0.$$

gegeben ist; so müssen die Variationen δx, δy, δz den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z = 0 \text{ und } \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0$$

genügen. Leitet man aus diesen Gleichungen die Werthe für zwei dieser Variationen ab und setzt diese Werthe in die Gleichung (a) hinein, so verschwindet die dritte Variation;

als Endgleichung, welche die Bedingungen des Gleichgewichts ausdrückt, findet man so dieselbe, welche in §. 27 gegeben ist.

III. Zusammensetzung und Gleichgewicht mehrerer parallelen Kräfte, die auf ein System materieller unveränderlich unter sich verbundener Punkte wirken.

---

§. 31. Wir betrachten hier ein System so unter einander verbundener materieller Punkte, daß in ihrer Lage gegen einander keinerlei Veränderung eintreten kann, wie dies wirklich der Fall sein würde, wenn die Punkte einem festen, völlig unbiegsamen Körper angehörten. Auf diese Punkte sollen beliebige, aber sämmtlich einander parallele Kräfte wirken, von denen ein Theil streben möge, den Körper nach der einen Seite zu bewegen, während der andere Theil nach der entgegengesetzten Richtung zieht.

Wir haben in §. 11 und §. 14 den Begriff der Resultierenden zweier Kräfte entwickelt. Die Resultierende mehrerer auf ein System von materiellen Punkten wirkender Kräfte ist eine Kraft, welche ebenso auf das System wirken würde, wie dies die gegebenen Kräfte in ihrer Gesammtheit thun, so daß, wenn man an dem Systeme eine dieser Resultierenden gleiche, aber entgegengesetzte Kraft anbringt, die Wirkung der gegebenen Kräfte völlig aufgehoben wird und das System im Gleichgewichte ist.

Wenn ein System von Kräften gegeben ist, die auf mehrere materielle Punkte wirken, so kann man nicht immer für dies System eine einzige Resultierende finden; folglich kann man nicht stets durch Hinzufügung einer einzigen Kraft den gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten. Unsere Aufgabe ist demnach folgende: 1) die Resultierende, wenn

es eine giebt, zu bestimmen und in allen Fällen das gegebene System auf die geringst mögliche Zahl von Kräften zu reducieren; 2) zu bestimmen, unter welchen Bedingungen Gleichgewicht eintritt.

§. 32. Sind zunächst die beiden nach derselben Richtung wirkenden Parallelkräfte P und P' gegeben; so findet man den Werth ihrer Resultierenden, indem man diese beiden Kräfte nach dem Grundgesetz vom Hebel zusammensetzt:

$$R = P + P';$$

die Richtung dieser Resultierenden ist den Richtungen der beiden Kräfte parallel und liegt in derselben Ebene; sie zerlegt zugleich die Entfernung dieser beiden Richtungen in zwei den Kräften umgekehrt proportionale Theile. Wenn man demnach die (Fig. 10) auf die Richtungen der beiden Kräfte P und P' von einem Punkt in ihrer Ebene gefällten Lothe Am und Am' mit x und x' bezeichnet, so ist die Entfernung der Richtung der Resultierenden R vom Punkte A

Fig. 10.

$$An = \frac{Px + P'x'}{P + P'}.$$

§. 33. Zweitens untersuchen wir den Fall, daß die beiden gegebenen Parallelkräfte P und P' nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Ist P die größere dieser beiden Kräfte und bringt man an dem Systeme in der Ebene der Richtungen der gegebenen Kräfte P und P' so eine dritte Kraft $P - P'$ an, welche nach der entgegengesetzten Richtung, wie P zieht, daß sich die Entfernungen mn und mm' (Fig. 11) wie P' zu P verhalten; so findet nach dem Prinzip vom Hebel Gleichgewicht statt. Die der Kraft $P - P'$ gleiche

Fig. 11.

und direkt entgegengesetzte Kraft R ist also die Resultierende der beiden Kräfte P und P', weil Gleichgewicht eintritt, wenn die Kraft $P - P'$ an dem Systeme angebracht wird. Der Werth der Resultierenden der beiden gegebenen Kräfte ist folglich

$$R = P - P',$$

und die Entfernung An ihrer Richtung von einem beliebig in der Ebene der Kräfte angenommenen Punkte A ist

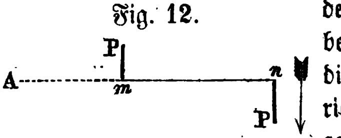
$$\frac{Px - P'x'}{R}.$$

§. 34. Wir müssen den Fall, daß $P = P'$, besonders untersuchen. Wenn ebenfalls $x = x'$ ist, die beiden Kräfte also gleich und direkt einander entgegengesetzt sind; so ist die Resultierende $= 0$ und das System ist im Gleichgewichte. Sind jedoch die beiden Kräfte P und P' gleich und entgegengesetzt, ohne daß die Richtungen dieser Kräfte in einander fallen; so wird in der vorhergehenden Formel $An = \frac{Px - P'x'}{R}$ die Entfernung der Richtung der Resultierenden vom Punkte A unendlich groß.

Es ist also die Resultierende der gegebenen Kräfte $= 0$, und ihre Richtung ist unendlich weit von dem Richtungen der Kräfte entfernt; oder genauer gesagt, sie haben keine Resultierende. Ein solches System bildet ein Kräftepaar.

§. 35. Wenn uns ein beliebiges Paar gleicher, paralleler und nach entgegengesetzter Richtung ziehender Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben geraden Linie liegen, vorliegt und wenn wir durch ϖ die Entfernung mn (Fig. 12) der Richtungen dieser Kräfte bezeichnen; so kann die Wirkung dieses Paares auf die materielle Ebene, an der es angebracht ist, nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden. Denn diese Wirkung ist von

Fig. 12.



einer so eigenthümlichen Beschaffenheit, daß sie nur durch die eines andern Paares aufgehoben werden kann. Man kann übrigens um zu sehen, worin die Wirkung des gegebenen Paares besteht, einen beliebigen Punkt der Ebene, auf welche es wirkt, A etwa, fest werden lassen. Dann wird die gleichzeitige Wirksamkeit der beiden Kräfte P diese Ebene um den Punkt A nach der durch den Pfeil bezeichneten Richtung zu drehen suchen; das Maß dieser Wirksamkeit ist die Differenz der Momente $P.Am$ und $P.An$, d. h. $P.\varpi$.

Ein auf eine materielle Ebene wirkendes Kräftepaar sucht die Ebene um einen ihrer Punkte mit einer Kraft zu drehen, deren Werth durch das Moment des Kräftepaares gemessen wird; der analytische Ausdruck für dasselbe ist $P\varpi$. Dies ist die Wirksamkeit eines Kräftepaares.

Diese Wirkung kann, wie schon gesagt ist, nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche nicht die materielle Ebene zu drehen, sondern nur längs ihrer Richtung zu verschieben sucht. Wird jedoch einer der Punkte der materiellen Ebene wirklich fest, so daß diese Ebene im Raume nicht mehr verschoben werden kann und allein die drehende Bewegung um den festen Punkt übrig ist; dann werden die Wirkungen der Kraft und des Kräftepaares in Beziehung auf Erzeugung oder Verhinderung dieser drehenden Bewegung völlig vergleichbar. Die Wirksamkeit des Kräftepaares wird nämlich stets durch das Moment $P\varpi$ gemessen, dessen Werth von der Lage des festen Punktes gegen die Richtungen der Kräfte P unabhängig ist; die Wirksamkeit einer Kraft Q wird durch ihr Moment Qq gemessen, worin q die Entfernung des festen Punktes von der Richtung der Kraft bezeichnet. Ist nun $P\varpi = Qq$ und wirkt die Kraft Q zugleich dem Kräftepaare entgegen; so wird diese Kraft Q dem Kräftepaare das Gleichgewicht halten.

§. 36. Wenn ferner ein System von mehreren parallelen Kräften P, P', P''... auf unveränderlich mit einander verbundene materielle Punkte wirkt, die im Raume eine beliebige Lage haben; so legen wir in der Ebene, durch welche wir die Richtungen der Kräfte senkrecht durchschnitten denken, die rechtwinklichten Axen Ax und Ay fest. Jene Ebene schneidet die Richtungen der gegebene Kräfte P, P', P''..., in den Punkten m, m', m''..., deren Coordinaten wir mit x und y, x' und y, x'' und y'' ... bezeichnen wollen.

Wirken nun erstens unter dieser Voraussetzung alle gegebenen Kräfte nach derselben Richtung, so kann man sie leicht zu je zweien nach dem Prinzip vom Hebel zusammensetzen. Die Resultierende der beiden ersten Kräfte P und P' hat den Werth $P+P'$. Ihre Richtung schneidet die Ebene xAy in einem Punkte der Linie mm', und zwar demjenigen, welcher dieselbe in zwei den Kräften P und P' umgekehrt proportionale Stücke theilt; man findet hiernach leicht die Coordinaten dieses Punktes:

$$\frac{Px+P'x'}{P+P'} \text{ und } \frac{Py+P'y'}{P+P'}.$$

Wenn man ebenso die Resultierende der beiden ersten Kräfte mit der dritten, die neue Resultierende mit der vierten Kraft zusammensetzt u. s. w.; so sind die Werthe für die Resultierende aller Kräfte R und für die Coordinaten X und Y des Punktes, in welchem die Richtung dieser letzten die Ebene xAy schneidet:

$$R = S.P, \quad X = \frac{S.Px}{R}, \quad Y = \frac{S.Py}{R}.$$

Durch diese Gleichungen ist Größe und Richtung der Resultierenden bestimmt.

§. 37. Im zweiten Falle, daß ein Theil der gegebenen Kräfte nach der einen Seite, der andere Theil nach der entgegengesetzten hinzieht, kann man das System zunächst

auf die beiden partiellen Resultierenden reducieren, welche nach entgegengesetzten Richtungen wirken, jedoch ohne sich direct entgegenstehen zu brauchen. Bezeichnet man mit P_1 eine nach der einen Seite, mit P_2 eine nach der andern Seite ziehende Kraft, so sind die Werthe der partiellen Resultierenden:

$$Q_1 = S.P_1, \quad Q_2 = S.P_2;$$

die Coordinaten der Ansatzpunkte derselben sind

für die Kraft Q_1: $\frac{SP_1x_1}{Q_1}$ und $\frac{S.P_1y_1}{Q_1}$,

für die Kraft Q_2: $\frac{SP_2x_2}{Q_2}$ und $\frac{S.P_2y_2}{Q_2}$.

Diese beiden Kräfte Q_1 und Q_2 können dann (mit Ausnahme des Falles, daß $Q_1 = Q_2$) zu einer einzigen Resultierenden zusammengesetzt werden, wie in §. 32 und §. 33 nachgewiesen ist.

Es ist also:

$$R = Q_1 - Q_2;$$

und die Coordinaten X und Y des Punktes, in welchem diese Resultierende die Ebene der x und y schneidet, sind

$$X = \frac{S.P_1x_1 - S.P_2x_2}{Q_1 - Q_2} \text{ und } Y = \frac{S.P_1y_1 - S.P_2y_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Es bestimmen also so gut in diesem, wie in dem Falle des vorigen §. die gesuchte Resultierende die Gleichungen:

$$R = S.P, \quad X = \frac{S.Px}{R}, \quad Y = \frac{S.Py}{R},$$

wenn man nur in den mit S bezeichneten Summen für die nach entgegengesetzten Richtungen ziehenden Kräfte die entgegengesetzten Vorzeichen nimmt. Natürlich muß man auch den Coordinaten x und y die entgegengesetzten Vorzeichen geben, je nachdem sie auf der positiven oder der negativen Seite der Axen Ax und Ay gezählt werden.

§. 38. Man kann außerdem bemerken, daß die Producte Px und Py bezüglich das Maß der Wirksamkeit der

Kraft P in Beziehung auf die Drehung des Systems um die Axe der y und die der x sind, welche senkrecht auf der Richtung dieser Kraft stehen. Diese Producte nennt man die **Momente** der Kraft P in Beziehung auf diese Axen, und das Wort Moment ist hier in ähnlichem Sinne gebraucht wie in dem in §. 35 erwähnten Falle. Ebenso stellen die Producte RX und RY die Momente der Resultierenden R in Beziehung auf dieselben Axen dar. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich also, daß das Moment der Resultierenden eines Systems von Parallelkräften immer der Summe der Momente der componierenden Kräfte gleich ist, wenn diese Momente in Beziehung auf eine beliebige auf der Richtung der Kräfte senkrecht stehende Linie genommen sind.

Ferner ist die Summe der Momente der Kräfte, welche in Beziehung auf eine senkrecht auf ihren Richtungen stehende und durch einen beliebigen Punkt der Richtung der Resultierenden hindurchgehende Axe genommen sind, stets $= 0$.

§. 39. In dem besondern Falle, daß die beiden nach entgegengesetzten Richtungen ziehenden partiellen Resultierenden, die wir mit Q_1 und Q_2 bezeichnet haben, einander gleich sind, reducieren sich die Kräfte des Systems auf ein Kräftepaar und es kann dann also keine Gesammtresultierende geben. Die Ebene, in welcher die Richtungen der beiden gleichen Kräfte Q_1 und Q_2 enthalten sind, ist diejenige, in welcher dieses Kräftepaar wirkt. Die Entfernung dieser Richtungen ist:

$$\frac{1}{Q}\sqrt{(S.P_1x_1 - S.P_2x_2)^2 + (S.P_1y_1 - S.P_2y_2)^2}$$

und es strebt folglich das Kräftepaar das System um eine beliebige auf seiner Ebene senkrechte Axe zu drehen, so daß seine Wirksamkeit gemessen wird durch das Moment

$$\sqrt{(S.P_1x_1 - S.P_2x_2)^2 + (S.P_1y_1 - S.P_2y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(S.Px)^2 + (S.Py)^2}.$$

§. 40. Endlich, da Gleichgewicht in dem Systeme offenbar nur dann bestehen kann, wenn die beiden Resultierenden einander gleich und direkt entgegengesetzt sind, also die Entfernung ihrer Richtungen $= 0$ ist; so enthalten die folgenden drei Gleichungen die Bedingungen dieses Gleichgewichts

$$S.P = 0, \quad S.Px = 0, \quad S.Py = 0,$$

d. h. es muß ebenso wohl die Summe der Kräfte, wie die Summe ihrer Momente, die in Beziehung auf eine beliebige auf ihren Richtungen senkrechte Linie genommen sind, $= 0$ sein.

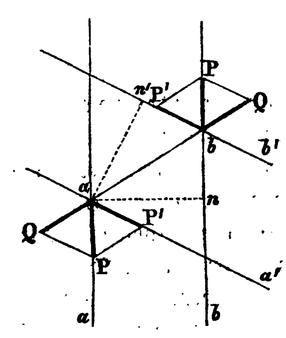
Andere Methode um die obigen Resultate zu erhalten.

§. 41. Wenn man die Bedingungen des Gleichgewichts und der Zusammensetzung eines Systems von Parallelkräften vollständig erkennen will; so läßt es sich nicht umgehen, wie man sieht, auf die Fälle Rücksicht zu nehmen, wo die Kräfte sich auf ein einziges Paar reducieren, wo also Gleichgewicht unmöglich ist und die Kräfte nicht zu einer einzigen Resultierenden zusammengesetzt werden können. Eine directe Betrachtung der Kräftepaare giebt uns das Mittel auf sehr einfache Weise die daraus entspringenden Aufgaben aufzulösen. Wir wollen zunächst die allgemeinen Sätze geben, aus denen hervorgeht, daß die Kräftepaare nach ähnlichen Gesetzen zusammengesetzt und zerlegt werden können, wie die einfachen Kräfte.

Aus dem in §. 35 gegebenen Nachweise, worin die Wirksamkeit eines Kräftepaares besteht, folgt unmittelbar, daß man statt eines gegebenen, aus den beiden entgegengesetzten Kräften P gebildeten Kräftepaares, deren Richtungen um ϖ von einander entfernt sind, jedes andere Kräftepaar, welches eine beliebige Lage gegen das erstere hat, an die

Stelle setzen darf, wofern nur $P'\varpi' = P\varpi$, und beide Paare die materielle Ebene nach derselben Seite zu drehen suchen. Denn es seien aa und bb (Fig. 13) die Richtungen der Kräfte

Fig. 13.



P des ersten Paares und aa' und bb' die Richtungen der Kräfte P' des zweiten Paares; nehmen wir nun an, daß die Punkte a und b ihrer Richtungen die Ansatzpunkte der Kräfte P sind; so kann man statt dieser ihre Componierenden, P', welche nach der Richtung von aa' und bb' wirken, und Q, welche nach Richtung von ab wirken, an die Stelle setzen. Diese letztern Kräfte Q heben sich einander auf, da sie einander gleich und entgegengesetzt sind und die Kräfte P des ersten Paares sind deshalb völlig durch die Kräfte P' des zweiten Paares ersetzt. Die Kräfte P und P' verhalten sich aber augenscheinlich umgekehrt, wie die Lothe an und an', deshalb ist $P'\varpi' = P\varpi$.

§. 42. Aus dem Vorhergehenden folgt, das man im Stande ist mehrere gegebene, in derselben materiellen Ebene enthaltene Kräftepaare, deren Momente resp. $P\varpi$, $P'\varpi'$, $P''\varpi''$... sind, ohne die Einwirkung derselben auf die materielle Ebene zu verändern, durch ein einziges Paar zu ersetzen, das aus den beiden gleichen und nach verschiedenen Seiten ziehenden Kräften R gebildet ist, deren Richtungen die Entfernung ϱ von einander haben; nur müssen die Größen R und ϱ der Gleichung

$$R\varrho = P\varpi + P'\varpi' + P''\varpi'' \ldots \text{ oder } R\varrho = S.P\varpi$$

Genüge leisten. Denn wir können nach dem vorangehenden Satze an die Stelle der gegebenen Kräftepaare neue setzen, welche längs zweier beliebiger paralleler Linien, deren

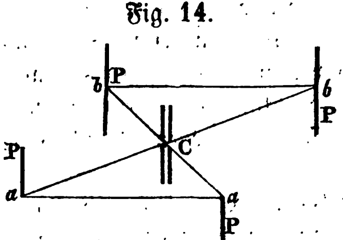
Entfernung $= \varrho$ ist, wirken; weil wir hier nun die Kräfte P, P', P''... mit den Verhältnißzahlen $\frac{\varpi}{\varrho}$, $\frac{\varpi'}{\varrho}$, $\frac{\varpi''}{\varrho}$... multiplicieren müssen, so lassen sich die Kräfte summieren und geben nach Richtung jeder Linie eine Kraft R, deren Werth ist

$$R = P.\frac{\varpi}{\varrho} + P'\frac{\varpi'}{\varrho} + P''\frac{\varpi''}{\varrho} + \ldots$$

Wenn man das resultierende Kräftepaar bildet, muß man natürlich die aus den Kräftepaaren hervorgehenden Kräfte, je nachdem sie die materielle Ebene nach der einen oder nach der andern Seite zu drehen streben, als einander entgegengesetzt ansehen; man muß also den Momenten $P\varpi$, die nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräftepaaren zugehören, entgegengesetzte Vorzeichen geben. Das Vorzeichen der Summe $S.P\varpi$ zeigt die Richtung an, nach welcher das resultierende Paar wirkt.

§. 43. Ferner kann man ein Kräftepaar, ohne daß seine Wirksamkeit auf ein beliebiges System von materiellen Punkten sich änderte, durch jedes andere Paar, das in einer der seinigen parallelen Ebene enthalten ist, ersetzt werden, wenn nur die Momente beider Paare gleich sind und sie das System nach derselben Richtung zu drehen streben. (Fig. 14). Es sei das Kräftepaar aus den beiden gleichen, an den Endpunkten der Linie aa nach entgegengesetzten Seiten hin wirkenden Kräften P gebildet. Wenn wir nun in einer Ebene, welche der dieser beiden Kräfte parallel ist, eine Linie bb gleich und parallel mit aa festlegen und die beiden Linien ab und ab ziehen, welche sich in C halbieren; so verändert man den Zustand des

Fig. 14.



Systems nicht, wenn man diese Linien unter einander und mit dem Systeme, auf welches das Kräftepaar wirkt, als unveränderlich verbunden ansieht, und wenn man zugleich an den Punkten *bb* je zwei gleiche, den Kräften *P* parallele nach verschiedenen Richtungen ziehende Kräfte, und an dem Punkte *C* vier gleiche je zwei und zwei sich aufhebende Kräfte anbringt. Läßt man sodann die Kräfte, welche sich an den Hebeln *ab* und *ab* einander das Gleichgewicht halten, aus dem System weg; so bleiben allein die beiden nach entgegengesetzten Richtungen an den Endpunkten der Linie *bb* wirkenden Kräfte *P* übrig, d. h. das gegebene Kräftepaar ist sich selbst parallel in eine andre der seinigen parallele Ebene übertragen.

§. 44. Verbindet man diesen Satz mit dem in §. 41 und §. 42 gegebenen; so erkennt man, wie mehrere beliebige in parallelen Ebenen wirkende Kräftepaare zusammengesetzt werden können. Das resultierende Kräftepaar wirkt in einer beliebigen denen der componierenden Paare parallelen Ebene und sein Moment ist der Summe der Momente der componierenden Paare gleich; man muß dabei natürlich den Momenten der Kräftepaare, welche das System nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, entgegengesetzte Vorzeichen geben.

§. 45. Wir gehen zu der Untersuchung zweier in nicht parallelen Ebenen wirkender Kräftepaare über. Unter jeder Bedingung darf man annehmen, 1) daß sie beide durch gleiche Kräfte *P* gebildet sind; 2) daß die Richtungen je einer Kraft dieser Kräftepaare in der Linie liegen, in der sich die die Kräftepaare enthaltenden Ebenen schneiden, (Fig. 15). *AA* sei die Schnittlinie der Ebenen, *AB* und *AC* seien die Lothe auf dieser Linie, welche für die Entfernungen der Richtungen der die Kräftepaare bildenden Kräfte *P* in ihren Ebenen das Maß sind. Die Momente der beiden

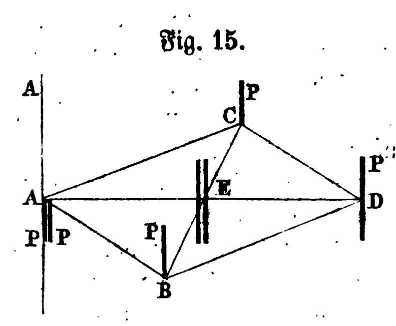


Fig. 15.

gegebenen Kräftepaare sind daher bezüglich $P.AB$ und $P.AC$ und der Winkel ABC ist der Neigungswinkel der Ebenen der Kräftepaare. Wenn wir sodann das Parallelogramm $ABCD$ construieren, und die beiden Diagonalen AD und BC ziehen; so verändert man den Zustand des Systems nicht, wenn man diese Linien unter sich und mit dem Systeme, auf welches die gegebenen Kräftepaare wirken, als unveränderlich verbunden ansieht, alsdann im Punkte D zwei den Kräften P gleiche und parallele, nach entgegengesetzten Richtungen ziehende Kräfte anbringt, ebenso im Punkte E vier eben solche sich je zwei und zwei aufhebende Kräfte. Wenn man dann die Kräfte, welche sich an den beiden Hebeln AD und BC das Gleichgewicht halten, aus dem Systeme wegläßt; so bleiben zwei Kräfte P, die nach entgegengesetzten Seiten auf die Endpunkte der Diagonale AD wirken, d. h. ein in der Ebene AAD enthaltenes Kräftepaar, dessen Moment $= P.AD$ ist. Demnach giebt die Diagonale des Parallelogramms, das aus den die Richtungen der Ebenen der Kräftepaare und die Momente derselben repräsentierenden Linien construiert ist, die Richtung der Ebene des resultierenden Kräftepaares und dessen Moment.

§. 46. Dieser Satz kann auch so dargestellt werden. Das Kräftepaar strebt, wie in §. 35 nachgewiesen ist, die Ebene, in welcher es wirkt, um einen beliebigen Punkt dieser Ebene zu drehen; allgemeiner gefaßt, strebt das Kräftepaar das System, an welchem es angebracht ist, um ein auf die Ebene des Paares gefälltes Loth zu drehen. Wir

wollen diese Linie Axe des Kräftepaares nennen; man kann ihr im Raume jede beliebige Lage geben, so lange sie nur auf der Ebene des Paares senkrecht bleibt. Da nun nach §. 43 ein Kräftepaar ohne Veränderung im Zustande des Systems in eine beliebige der seinigen parallele Ebene verlegt werden kann, so ist die Wirksamkeit eines Kräftepaares völlig bestimmt, wenn die Richtung seiner Axe und der Werth seines Moments gegeben ist. Hiernach erkennt man aus §. 45 leicht, daß die Diagonale des Parallelogramms, das aus den beiden Linien construiert ist, die der Richtung nach die Axen der beiden Paare, der Größe nach die Momente derselben darstellen, ihrer Richtung nach die Axe, ihrer Größe nach das Moment des resultierenden Paares darstellt.

Es können also die Kräftepaare nach denselben Gesetzen zusammengesetzt und zerlegt werden, wie die Kräfte; und da man immer die Axe eines Paares parallel mit sich selbst in einen beliebigen Punkt des Raumes verlegen kann, so sieht man, daß die im zweiten Capitel aufgestellten Regeln über die Zusammensetzung auf einen materiellen Punkt wirkender Kräfte völlig auf die Zusammensetzung von Kräftepaaren passen.

§. 47. Wir müssen jetzt prüfen, unter welchen Bedingungen mehrere parallele Kräfte, die auf ein System materieller Punkte wirken, welche gegen einander eine beliebige, aber unveränderliche Lage haben, sich das Gleichgewicht halten. Wir bezeichnen, wie in §. 36, durch P eine dieser Kräfte, durch x und y die Coordinaten des Punktes, in welchem die Richtung derselben die gegen die Richtungen aller Kräfte senkrecht gelegte Ebene schneidet; man kann ohne den Zustand des Systems zu ändern, am Anfangspunkte der Coordinaten zwei der Kraft P gleiche, nach entgegengesetzen Richtungen ziehende Kräfte anbringen;

und wenn man so mit allen Kräften verfährt; so sind sie durch andre, nach derselben Richtung, wie sie selbst, ziehende Kräfte, welche am Anfangspunkt der Coordinaten angebracht sind, und durch Kräftepaare ersetzt, die in durch die Axe der z hindurchgehenden Ebenen wirken, und deren Momente sämmtlich die Form haben $P.\sqrt{x^2+y^2}$.

Wenn Gleichgewicht besteht, so müssen sich erstens die im Anfangspunkte der Coordinaten angebrachten Kräfte aufheben; also muß man haben

$$S.P=0.$$

Zweitens muß, wenn man die durch jede der Kräfte gebildeten Kräftepaare zusammensetzt, auch das Moment des resultierenden Paares $=0$ sein. Das durch die Kraft P gebildete Kräftepaar kann nun durch zwei andre ersetzt werden, die in der Ebene der zx und zy parallel mit den Richtungen der gegebenen Paare wirken und deren Momente bezüglich Px und Py sind. Alle durch die gegebenen Kräfte gebildeten Paare können demnach durch je zwei andre Paare ersetzt werden, die in den eben genannten Ebenen enthalten sind und ihre Momente sind resp. $S.Px$ und $S.Py$. Da das Moment des resultierenden Paares $=0$ sein muß, wenn Gleichgewicht besteht, so muß auch sein

$$S.Px=0, \quad S.Py=0.$$

Die drei Gleichungen:

$$S.P=0, \quad S.Px=0, \quad S.Py=0$$

enthalten vollständig die Bedingungen, unter denen das System im Gleichgewicht ist. Nach der ersten muß die Summe der Kräfte $=0$ sein, nach den beiden andern muß die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf zwei senkrecht auf ihren Richtungen stehende Axen $=0$ sein. Wenn dies für zwei beliebige auf den Richtungen der Kräfte senkrechte, aber unter sich nicht parallele Axen der Fall ist,

so ist es auch für jede dritte gleichfalls auf diesen Richtungen senkrecht stehende Axe der Fall.

§. 48. Wenn es eine Resultierende giebt; so muß sie der Kraft, welche Gleichgewicht im System hervorbringen würde, gleich und direct entgegengesetzt sein: wenn man nun durch R diese Resultierende, durch X und Y die Coordinaten des Punktes, in welchem die Richtung derselben die Ebene der xy schneidet, bezeichnet; so ist offenbar

$$R = S.P, \quad RX = S.Px, \quad RY = S.Py$$

und deshalb

$$X = \frac{S.Px}{R}, \quad Y = \frac{S.Py}{R}.$$

Es ist daher 1) die Resultierende gleich der Summe der componierenden Kräfte; 2) das Moment der Resultierenden in Beziehung auf eine beliebige auf den Richtungen der gegebenen Kräfte senkrechte Axe genommen gleich der Summe der Momente der componierenden Kräfte in Beziehung auf dieselbe Axe genommen. Dies ist für alle derartigen Axen der Fall, sobald es für zwei einander nicht parallele Axen der Fall ist.

Man sieht auch, daß die Summe der Momente der Kräfte $= 0$ ist, wenn diese in Beziehung auf eine beliebige Axe genommen sind, welche durch einen Punkt der Richtung der Resultierenden hindurchgeht und auf dieser Richtung senkrecht steht.

§. 49. Wenn $R = 0$ ist, ohne daß zugleich $S.Px$ und $S.Py = 0$ sind, dann haben die Kräfte nicht eine einzige Resultierende, sondern reducieren sich auf ein Kräftepaar, dessen componierende Paare in den Ebenen der zx und zy liegen und resp. die Momente $S.Px$ und $S.Py$ haben.

Mittelpunkt der Parallelkräfte.

§. 50. Wenn die Richtungen der gegebenen Kräfte unter sich parallel sind und diese selbst an verschiedenen Punkten angebracht sind, welche ein System von unveränderlich angenommener Gestalt bilden; so kann man durch Zusammensetzung der beiden ersten Kräfte zu einer einzigen, der Resultierenden mit der dritten u. s. f. die Resultierende der gegebenen Kräfte finden, wenn es eine giebt, und man bestimmt zugleich die Größe, die Richtung und den Ansatzpunkt dieser Resultierenden. Die Lage dieses Ansatzpunktes hängt ferner allein von der Lage der Ansatzpunkte der gegebenen Kräfte gegen einander, und von der Intensität derselben ab, nicht jedoch von ihren Richtungen, so daß man diese beliebig ändern kann, wenn sie nur einander parallel bleiben und die Kräfte die nämlichen Ansatzpunkte und dieselbe Stärke behalten, ohne daß der Ansatzpunkt der Resultierenden sich änderte.

Dieser Ansatzpunkt der Resultierenden wird **Mittelpunkt der Parallelkräfte** genannt. Wenn wir die in §. 36 u. ff. gebrauchten Benennungen beibehalten und ferner die Entfernungen der Ansatzpunkte der Kräfte P, P', P'' ... von der Ebene der xy mit z, z', z'' ... und die Entfernung des Ansatzpunktes der Resultierenden von derselben Ebene mit Z bezeichnen; so ist nach §. 37 und §. 39 die Lage dieses Punktes bestimmt durch die drei Coordinaten

$$X = \frac{S.Px}{S.P}, \quad Y = \frac{S.Py}{S.P}, \quad Z = \frac{S.Pz}{S.P}.$$

Denn da der Mittelpunkt der Parallelkräfte stets in der Richtung der Resultierenden liegt; so müssen die Werthe der diese Richtung bestimmenden Coordinaten, wenn man nach einander parallel mit den drei Axen der x, der y und

der z die Richtungen der Kräfte verschoben denkt, jenem Punkte angehören.

§. 51. Die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf eine beliebige Axe genommen, welche, auf den Richtungen derselben senkrecht, durch den Mittelpunkt der Parallelkräfte hindurchgeht, ist stets $= 0$. Also streben die Kräfte nicht das System nach irgend einer Richtung hin um diesen Punkt zu drehen; wenn derselbe fest wird, so ist demnach das System im Gleichgewichte, welche Lage im Raume auch die Richtungen der parallelen Kräfte haben mögen.

§. 52. Wenn sich das System der Kräfte auf ein Kräftepaar reduciert, so giebt es keinen Mittelpunkt der Parallelkräfte.

§. 53. Wenn alle mit P bezeichneten Kräfte einander gleich sind, so gehen die Formeln des §. 50 über in

$$X = \frac{S.x}{n}, \quad Y = \frac{S.y}{n}, \quad Z = \frac{S.z}{n},$$

wo n die Zahl der Kräfte bezeichnet. Der Punkt, welchem die Coordinaten X, Y, Z angehören, hängt alsdann nur von der Lage der Ansatzpunkte gegen einander ab. Man nennt ihn **Mittelpunkt der mittleren Entfernungen** und die Aufgabe diesen Punkt zu bestimmen ist eine rein geometrische.

IV. Zusammensetzung und Gleichgewicht mehrerer Kräfte, welche beliebige Richtungen haben und auf ein System materieller, unveränderlich unter einander verbundener Punkte wirken.

---

§. 54. In einem aus mehreren materiellen unveränderlich unter sich verbundenen Punkten bestehenden Systeme, auf welches Kräfte nach beliebiger Richtung hin wirken, bezeichne P den Werth der einen dieser Kräfte in Gewichts-

einheiten; x, y, z, die drei rechtwinklichten Coordinaten ihres Ansatzpunktes; α, β und γ die Winkel, welche die Richtung der Kraft resp. mit den Axen x, y und z bildet. Es liegt uns die Aufgabe vor: 1) sämmtliche Kräfte P zu einer einzigen Resultierenden zusammenzusetzen, wenn dies möglich ist oder wenigstens die Zahl der Kräfte am Systeme auf die kleinstmögliche zu reducieren; 2) die Bedingungen auszudrücken, unter denen sich diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten.

Indem wir erstens das System der gegebenen Kräfte im Gleichgewichte annehmen, wollen wir die Bedingungen dieses Gleichgewichts auszudrücken suchen. Jede der Kräfte P kann in die drei Kräfte $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$ zerlegt werden, die resp. den drei Axen der x, y und z parallel wirken. Ohne den Gleichgewichtszustand des Systems zu ändern können wir dann im Anfangspunkte der Coordinaten parallel mit den Richtungen der Kräfte $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$, je zwei einander entgegengesetzte und jenen resp. gleiche Kräfte anbringen. Dann liegt statt des gegebenen Systemes vor: 1) ein System von Kräften, welche im Anfangspunkte der Coordinaten nach Richtungen der drei Axen wirken; 2) ein System von Kräftepaaren, welche von parallel mit diesen Axen wirkenden Kräften gebildet werden.

Wenn das System im Gleichgewicht ist, so müssen zunächst die im Anfangspunkte der Coordinaten angebrachten Kräfte sich gegenseitig aufheben, ihre Resultierende muß also $= 0$ sein; dies erfordert die drei Gleichungen

$$S.P\cos.\alpha = 0, \quad S.P\cos.\beta = 0, \quad S.P\cos.\gamma = 0.$$

Zweitens müssen alle Kräftepaare, welche jedes durch eine der Kräfte $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$ gebildet sind, sich gegenseitig aufheben, das Moment des resultierenden Paares muß $= 0$ sein. Es kann nun das durch die Kraft $P\cos.\alpha$

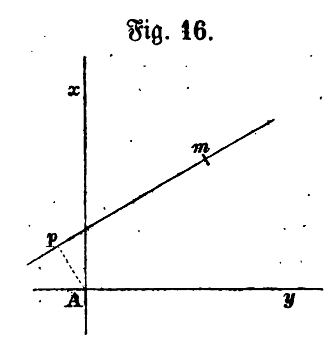
gebildete Kräftepaar, dessen Moment $P \cos.\alpha \sqrt{y^2+z^2}$ ist, durch zwei andere in den Ebenen der xy und xz wirkende Paare ersetzt werden, deren Momente $P.y \cos.\alpha$ und $P.z \cos.\alpha$ sind. Das durch die Kraft $P.\cos.\beta$ gebildete Kräftepaar, dessen Moment $= P.\cos.\beta \sqrt{x^2+z^2}$, kann durch zwei andere in den Ebenen der xy und yz wirkende Paare ersetzt werden, deren Momente $Px.\cos.\beta$ und $Pz.\cos.\beta$ sind. Endlich kann das durch die Kraft $P\cos.\gamma$ gebildete Kräftepaar, dessen Moment $= P \cos.\gamma \sqrt{x^2+y^2}$, durch zwei andere in den Ebenen der xz und yz wirkende Paare ersetzt werden, deren Momente $Px.\cos.\gamma$ und $Py.\cos.\gamma$ sind. Durch diese Zerlegung haben wir alle Kräftepaare durch andere Paare ersetzt, welche in den drei Coordinatenebenen wirken. Durch Zusammensetzung der in der Ebene der xy enthaltenen Paare bekommen wir ein partielles resultierendes Kräftepaar, dessen Moment $= S.P(y \cos.\alpha - x \cos.\beta)$ ist; jenes der in der Ebene der xz wirkenden Kräftepaare hat das Moment $S.P(x \cos.\gamma - z \cos.\alpha)$, und das der in der Ebene der yz wirkenden Kräftepaare hat das Moment $S.P(z \cos.\beta - y \cos.\gamma)$. Diese Ausdrücke sind so geschrieben, daß die Momente der Kräftepaare, welche das System in der Richtung von x gegen z, von z gegen y, von y gegen x hinzudrehen streben, positiv, die Momente der nach der entgegengesetzten Richtung hindrehenden Kräftepaare negativ genommen sind. Diese drei Kräftepaare lassen sich zu einem einzigen zusammensetzen, dessen Moment nicht $= 0$ sein kann, wenn nicht zugleich jedes der Momente der componierenden Paare $= 0$ ist; dies giebt die drei Gleichungen

$$S.P(y \cos.\alpha - x \cos.\beta) = 0; \quad S.P(x \cos.\gamma - z \cos.\alpha) = 0;$$
$$S.P(z \cos.\beta - y \cos.\gamma) = 0.$$

Zusammen mit den obigen ergeben diese Gleichungen völlig die Bedingungen des Gleichgewichts des Systems.

§. 55. Diese letzten drei Gleichungen lassen sich einfacher darstellen. Bezeichnen wir nämlich mit p, q, r die kürzesten Entfernungen der Richtung der Kraft P von den Axen der x, y und z; so wird, wenn (Fig. 16) mp die Projection der Richtung der Kraft P auf der verticalen Ebene der yz ist, die kürzeste Entfernung p dieser Richtung von der Axe der x auf derselben Ebene in Ap senkrecht auf mp projiciert. Da nun die Richtung der Kraft P mit der Ebene der yz einen Winkel bildet, welcher α zu 90^0 ergänzt; so ist der Cosinus des zwischen ihrer Projection mp und der Axe des y liegenden Winkels $= \frac{\cos.\beta}{\sin.\alpha}$; der Cosinus des zwischen derselben Projection und der Axe der z liegenden Winkels $= \frac{\cos.\gamma}{\sin.\alpha}$; es folgt daraus

Fig. 16.



$$p = z.\frac{\cos.\beta}{\sin.\alpha} - y.\frac{\cos.\gamma}{\sin.\alpha}.$$

Ebenso findet man:

$$q = x.\frac{\cos.\gamma}{\sin.\beta} - z.\frac{\cos.\alpha}{\sin.\beta} \text{ und } r = y\frac{\cos.\alpha}{\sin.\gamma} - x.\frac{\cos.\beta}{\sin.\gamma}.$$

Die drei gegebenen Gleichungen lassen sich also in folgende verwandeln

$$S.Pp\sin.\alpha = 0, \quad S.Pq\sin.\beta = 0, \quad S.Pr\sin.\gamma = 0.$$

Die drei Gleichungen

$$S.P\cos.\alpha = 0, \quad S.P\cos.\beta = 0, \quad S.P\cos.\gamma = 0$$

beziehen sich auf das Gleichgewicht der Verschiebung. Sie geben zu erkennen, daß die Summe der gegebenen Kräfte $= 0$ ist, wenn man ihre Wirkung nach den gegen

die drei Axen parallelen Richtungen abschätzt; und daß folglich die Summe dieser Kräfte gleichfalls = 0 ist, wenn man sie nach einer irgend einer Linie parallelen Richtung abschätzt. Die drei andern Gleichungen beziehen sich auf das Gleichgewicht der Drehung; sie drücken aus, daß die Summe der in Beziehung auf jede der drei Axen genommenen Momente der Kräfte = 0 ist, daß folglich die Summe der in Beziehung auf eine beliebige Linie genommenen Momente der Kräfte gleichfalls = 0 ist. Diese Momente sind das Maß für die Intensität der Kräfte in Beziehung auf die Drehung des Systems um eine dieser Axen oder eine andere beliebige Linie.

§. 56. Im zweiten Falle, daß das System der gegebenen Kräfte nicht im Gleichgewichte ist, lassen sich dieselben entweder auf eine einzige Kraft zurückführen oder nicht. Ist die Zusammensetzung der Kräfte zu einer einzigen, ihrer Resultierenden, möglich; so kann das System dadurch, daß eine dieser Resultierenden gleiche und direkt entgegengesetzte Kraft angebracht wird, in Gleichgewicht gesetzt werden. Bezeichnet man also diese durch R, die Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen bildet, durch a, b und c, die Coordinaten ihres Ansatzpunktes durch X, Y und Z; so findet man die sechs Gleichungen:

$$S.P\cos.\alpha - R\cos.a = 0,$$
$$S.P\cos.\beta - R\cos.b = 0,$$
$$S.P\cos.\gamma - R\cos.c = 0,$$
$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) - R(Y\cos.a - X\cos.b) = 0,$$
$$S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) - R(X\cos.c - Z\cos.a) = 0,$$
$$S.P(z\cos.\beta - y\cos.\alpha) - R(Z\cos.b - Y\cos.c) = 0.$$

Aus den drei ersten Gleichungen folgt

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\cos.\beta)^2 + (S.P\cos.\gamma)^2};$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R},\quad \cos.b = \frac{S.P\cos.\beta}{R},\quad \cos.c = \frac{S.P\cos.\gamma}{R};$$

aus den drei andern

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) - Y.S.P\cos.\alpha + X.S.P\cos.\beta = 0,$$
$$S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) - X.S.P\cos.\gamma + Z.S.P\cos.\alpha = 0,$$
$$S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) - Z.S.P\cos.\beta + Y.S.P\cos.\gamma = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Coordinaten X, Y, Z nicht bestimmen. Eliminiert man sie, so findet man die Bedingungsgleichung

$$0 = S.P\cos.\alpha\,.\,S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) + S.P\cos.\beta\,.\,S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) + S.P\cos.\gamma\,.\,S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta).$$

Dieser Gleichung muß Genüge geleistet werden, damit die drei obigen Gleichungen zusammen bestehen und den Projectionen einer und derselben geraden Linie angehören können, welche die Richtung der Resultierenden der Kräfte des Systems ist.

§. 57. Wenn jener obigen Bedingungsgleichung nicht Genüge geleistet werden kann, so lassen sich die gegebenen Kräfte nicht zu einer einzigen Resultierenden zusammensetzen. Sie können jedoch nach §. 54 stets auf eine im Anfangspunkte der Coordinaten wirkende Kraft, die Resultierende der nach Richtung der Axen der x, y und z wirkenden Kräfte $S.P\cos.\alpha$, $S.P\cos.\beta$, $S.P\cos.\gamma$ und auf ein einziges Kräftepaar, das resultierende Paar der drei in den Ebenen der xy, xz und yz wirkenden Kräftepaare, deren Momente bezüglich

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta),\quad S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha),\quad S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma)$$

sind, reduciert werden; da man ferner die im Anfangspunkte der Coordinaten wirkende Kraft mit der einen des Kräftepaares zusammensetzen kann, so läßt sich das System stets auf nur zwei Kräfte zurückführen.

§. 58. Eine Betrachtung der Kraft und des Kräftepaares, welche eben genannt sind, giebt übrigens unmittelbar

die analytische Bedingung zu erkennen, der Genüge geleistet werden muß, damit die gegebenen Kräfte auf eine einzige Resultierende reduciert werden können.

Diese Zurückführung ist nämlich möglich, wenn die Richtung der Kraft in der Ebene des Kräftepaares enthalten ist oder wenn die Richtung der Kraft senkrecht auf der Axe des Paares steht. Diese Bedingung wird durch die oben gewonnene Gleichung ausgedrückt.

§. 59. Man kann noch bemerken, daß die drei Gleichungen in §. 56. auch so geschrieben werden können

$$S.P\cos.\alpha(y-Y) - S.P\cos.\beta(x-X) = 0;$$
$$S.P\cos.\gamma(x-X) - S.P\cos.\alpha(z-Z) = 0;$$
$$S.P\cos.\beta(z-Z) - S.P\cos.\gamma(y-Y) = 0.$$

Sie drücken augenscheinlich aus, daß die Summe der Momente der Kräfte des Systems in Beziehung auf drei Axen genommen, welche den Axen x, y und z parallel durch den Punkt, dessen Coordinaten X, Y und Z sind, hindurchgehen, $= 0$ ist. Nun muß jeder Punkt der Richtung der Resultierenden diese Eigenschaft haben, wenn eine Resultierende vorhanden ist; es giebt demnach eine einzige Resultierende, wenn mit denselben Werthen der drei Coordinaten X, Y und Z diesen drei Gleichungen Genüge geleistet werden kann.

Besonderer Fall, daß die auf ein System wirkenden Kräfte in der nämlichen Ebene enthalten sind.

§. 60. Ist die Ebene der xy diejenige, welche die Richtungen der Kräfte enthält; so ergiebt sich aus dem vorhergehenden, daß die Bedingungen des Gleichgewichts gegeben sind allein durch die Gleichungen

$$S.P\cos.\alpha = 0, \quad S.P\cos.\beta = 0,$$

welche ausdrücken, daß die Resultierende der Kräfte $= 0$ ist, und

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) = 0,$$

welche ausdrückt, daß das Moment des resultierenden Paares gleichfalls $= 0$ ist. Diese letzte Gleichung kann ersetzt werden durch

$$S.Pp = 0,$$

wo p die Länge des vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Richtung der Kraft P gefällten Lothes bezeichnet; man muß in dieser Gleichung den Momenten Pp entgegengesetzte Vorzeichen geben, je nachdem die Kräfte P streben nach der einen oder nach der andern Seite das System um den Anfangspunkt der Coordinaten zu drehen.

§. 61. Ebenso hat man zur Bestimmung der Resultierenden die Gleichungen

$$S.P\cos.\alpha - R\cos.a = 0, \quad S.P\cos.\beta - R\cos.b = 0;$$

daraus ergiebt sich

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\cos.\beta)^2},$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R}, \quad \cos.b = \frac{S.P\cos.\beta}{R}$$

und

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) - Y.S.P\cos.\alpha + X.S.P\cos.\beta = 0.$$

Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene enthalten sind, können stets auf eine Resultierende zurückgeführt werden, welche durch diese Gleichungen bestimmt ist, mit Ausnahme des Falles, daß $S.P\cos.\alpha = 0$ und $S.P\cos.\beta = 0$ ist, woraus $R = 0$ folgt. Alsdann reducieren sich die Kräfte auf ein Kräftepaar, dessen Moment $S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta)$ oder $S.Pp$ ist.

Bedingungen des Gleichgewichts für den Fall, daß ein fester Punkt vorhanden ist, um den das System frei nach jeder Richtung sich drehen kann.

§. 62. Wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den festen Punkt legen und wie in §. 54, jede der Kräfte $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$ und $P\cos.\gamma$ durch eine gleiche, auf diesen

Anfangspunkt wirkende Kraft und durch ein Kräftepaar ersetzen; so werden die im Anfangspunkte angebrachten Kräfte durch den Widerstand des festen Punktes aufgehoben und das System kann sich nur durch die Einwirkung der Paare bewegen. Es tritt also Gleichgewicht ein, wenn das Moment des resultierenden Paares $= 0$ ist, d. h. wenn man die drei Gleichungen hat

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) = 0;\ S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) = 0;$$
$$S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) = 0.$$

Ein System, in welchem ein fester Punkt vorhanden ist, ist demnach im Gleichgewichte, wenn die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf drei beliebige durch den festen Punkt hindurchgehende Axen genommen $= 0$ ist.

§. 63. Der auf den festen Punkt geübte Druck ist gleich der Resultierenden der drei Kräfte

$$S.P\cos.\alpha,\quad S.P\cos.\beta,\quad S.P\cos.\gamma,$$

welche bezüglich nach der Richtung der Axen der x, der y und der z wirken.

Bedingungen des Gleichgewichts für den Fall, daß es in dem Systeme zwei feste Punkte giebt.

§. 64. Der größern Einfachheit wegen nehmen wir den einen festen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten und die Verbindungslinie beider festen Punkte, deren Entfernung wir a nennen wollen, als Axe der x an.

Wenn das System im Gleichgewichte ist, so heben sich entweder die darauf wirkenden Kräfte auf, und in diesem Falle müssen die Werthe derselben den sechs Gleichungen in §. 54 Genüge leisten; oder sie werden durch den Widerstand der festen Punkte aufgehoben, und in diesem Falle muß jenen sechs Gleichungen Genüge geleistet werden, wenn man in das System dem auf die festen Punkte geübten Druck gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte aufnimmt.

Bezeichnen wir also durch E, F, G die drei nach den Richtungen der Axen der x, der y und der z genommenen Componierenden des Drucks, der auf den ersten, im Anfangspunkte der Coordinaten liegenden, festen Punkt wirkt, durch E', F', G' die drei Componierenden des auf den zweiten festen Punkt geübten Drucks, welcher auf der Axe der x um a von dem ersten entfernt liegt; so ist augenscheinlich

$$S.P\cos.\alpha - E - E' = 0 \quad \text{und} \quad S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) + F'a = 0,$$
$$S.P\cos.\beta - F - F' = 0 \qquad S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) + G'a = 0,$$
$$S.P\cos.\gamma - G - G' = 0 \qquad S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) = 0.$$

Mögen nun die gegebenen Kräfte beschaffen sein, wie sie wollen, man kann stets Werthe für E, F, G und E', F', G' finden, welche den fünf ersten Gleichungen Genüge leisten. Die einzig nothwendige Bedingung für das Bestehen des Gleichgewichts ist also durch die Gleichung

$$S.P(\cos.\beta - y\cos.\gamma) = 0$$

ausgedrückt, welcher die Werthe der Kräfte Genüge leisten müssen; man schließt daraus, daß das Rotationsmoment der Kräfte in Beziehung auf die durch die beiden festen Punkte hindurchgehende Axe genommen $= 0$ sein muß.

§. 65. Wenn zwei feste Punkte im Systeme vorhanden sind; so kann sich dasselbe nur noch um die gerade Linie drehen, welche durch die beiden festen Punkte hindurchgeht; die letzte Gleichung drückt aus, daß die Kräfte eine solche Bewegung nicht hervorzubringen suchen. Wenn jedoch die beiden bezeichneten Punkte nicht völlig fest sind, sondern nur aus einer gegebenen Linie nicht heraustreten können; so muß man den oben mit E und E' bezeichneten Componierenden den Werth 0 geben und das Bestehen des Gleichgewichts erfordert demnach außer jener letzten Gleichung auch diese:

$$S.P\cos.\alpha = 0,$$

welche ausdrückt, daß die Summe der nach Richtung der Drehungsaxe genommenen Componierenden der Kräfte den Werth 0 hat.

§. 66. Die erste Gleichung des §. 64 ergibt

$$E + E' = S.P\cos.\alpha$$

und die vier folgenden Gleichungen

$$F' = -\frac{S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta)}{a},\quad F = \frac{S.P[y\cos.\alpha - (x-a)\cos.\beta]}{a},$$

$$G' = \frac{S.P(x\cos.\gamma - z\cos\alpha)}{a};\quad G = -\frac{S.P[(x-a)\cos.\gamma - z\cos.\alpha]}{a}.$$

Es sind demnach einzeln die Werthe des Drucks E und des Drucks E', welche nach Richtung der Verbindungslinie der beiden festen Punkte wirken, nicht bestimmbar; man kennt allein die Summe derselben. Dagegen ist der senkrecht auf diese Linie ausgeübte Druck für beide festen Punkte durch die vorangehenden Gleichungen völlig bestimmt.

§. 67. Wirken alle Kräfte des Systems in senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden festen Punkte stehenden Ebenen; so werden die Ausdrücke, welche cos. α enthalten, zu 0; dann ist

$$E + E' = 0,\quad F' = \frac{S.Px\cos.\beta}{a},\quad F = \frac{S.P(a-x)\cos.\beta}{a},$$

$$G' = \frac{S.Px\cos.\gamma}{a},\quad G = \frac{S.P(a-x)\cos.\gamma}{a}.$$

Nach Richtung der Verbindungslinie beider festen Punkte wirkt dann kein Druck. Senkrecht gegen diese Linie üben die Kräfte denselben Druck aus, als wenn sie ohne aus der Ebene, in der sie enthalten sind, herauszutreten, parallel mit sich selbst verschoben und an der gedachten Linie selbst angebracht wären.

§. 68. Wenn ein System drei oder mehr feste, nicht in gerader Linie liegende Punkte enthält, so halten sich die auf das System wirkenden Kräfte stets das Gleichgewicht;

wie sie auch beschaffen sein mögen. Die Werthe des Druckes, welchen alsdann die festen Punkte erleiden, sind im allgemeinen unbestimmt. Da jedoch dieser Druck nach entgegengesetzter Richtung genommen zusammen mit den auf das System wirkenden Kräften stets den sechs Gleichungen für das Gleichgewicht in §. 54 Genüge leisten muß; so giebt dies in jedem besondern Falle Grenzen, zwischen denen die Werthe des Druckes nothwendiger Weise enthalten sein müssen.

Diese Unbestimmtheit ist das nothwendige Resultat der Annahme, daß die das System bildenden Theile völlig unbiegsam, die Figur also, welche durch die der Einwirkung der Kräfte unterliegenden materiellen Punkte gebildet wird, völlig unveränderlich sein soll. Diese Annahme ist eine rein mathematische Hypothese, welche man machen muß, um die Lehre vom Gleichgewicht in einfacher Form zu geben, ohne daß sie genau mit der Erfahrung stimmt. Unter Einwirkung von Kräften verändert sich nämlich die Gestalt eines physischen Körpers stets ein wenig; und die Bedingungen dieser von der Beschaffenheit des Körpers abhängigen Veränderungen geben in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen vom Gleichgewichte hinreichend die Mittel in die Hand, um völlig den Zustand des Systems zu bestimmen, in welchem offenbar kein Element unbestimmt oder willkührlich bleiben darf.

Bedingungen des Gleichgewichts in dem Falle, daß ein der Einwirkung mehrerer Kräfte unterliegender Körper sich in einem oder mehreren Punkten gegen gegebene feste Flächen stützt.

§. 69. Wir nehmen zunächst an, daß der volle Körper sich in einem einzigen Punkte gegen eine Fläche stützt. Dieser Punkt kann sich nicht nach Richtung der Normale der Fläche bewegen, wohl aber nach beliebiger Richtung senkrecht gegen diese Normale, und außerdem kann der Körper

sich um eine beliebige Linie drehen, welche durch den betreffenden Punkt hindurchgeht. Wenn demnach Gleichgewicht eintreten soll; so müssen sich erstens 1) die auf den Körper wirkenden Kräfte zu einer einzigen Resultierenden zusammensetzen lassen, 2) muß die Richtung dieser Resultierenden mit der Normale zusammenfallen, die im Stützpunkte auf der Fläche errichtet ist. Natürlich muß die Resultierende gegen die Fläche drücken und nicht den Körper von derselben zu entfernen streben.

§. 70. Wenn sich der Körper in zwei Punkten gegen eine Fläche stützt, so stehen die Kräfte im Gleichgewicht, wenn man sie so zu zwei Resultierenden zusammensetzen kann — dies ist natürlich immer möglich, — daß die Richtungen derselben mit den auf der Fläche in den Stützpunkten errichteten Normalen zusammenfallen. Lassen sich die gegebenen Kräfte auf eine einzige Resultierende zurückführen; so müssen die beiden Normalen in derselben Ebene liegen, welche zugleich die Richtung der Resultierenden enthält, und sich in einem Punkte dieser Richtung schneiden. Uebrigens müssen die Kräfte, wie im vorigen Falle, den Körper gegen die Fläche hin, nicht von derselben abziehen.

§. 71. Wenn sich der Körper in drei Punkten gegen eine Fläche stützt; so darf man den Widerstand der Fläche drei Kräften gleich setzen, welche nach Richtung der in den Stützpunkten errichteten Normalen wirken und denen man beliebige Werthe beilegen kann, indem man zugleich angemessen feststellt, von welcher Seite sie wirken sollen. Läßt sich nun aus drei solchen Kräften ein System bilden, das völlig das System der gegebenen Kräfte aufhebt; so tritt das Gleichgewicht ein. Wenn also die gegebenen Kräfte sich auf eine einzige Resultierende zurückführen lassen; so kann nur dann Gleichgewicht stattfinden, wenn die drei Normalen sich in einem Punkte der Richtung dieser Resultierenden

schneiden, oder wenn die drei Normalen unter sich und mit der Richtung der Resultierenden parallel sind, zugleich diese vier Linien in derselben Ebene liegen und zwar die Richtung der Resultierenden zwischen den Normalen.

V. Vom Schwerpunkte.

§. 72. Bei den Anwendungen der Mechanik auf die technischen Arbeiten nimmt man an, daß die Schwerkraft, die Kraft, welche alle Körper gegen den Mittelpunkt der Erde hinzieht, parallel mit der Vertikale wirkt, d. h. nach Richtung des Bleiloths oder des Perpendikels auf der Oberfläche des Wassers. Man nimmt ferner diese Kraft als constant an, daß sie also auf jeden Theil des Körpers immer eine stets gleich stark bleibende Wirkung ausübt. Die Körper, welche wir in Betracht ziehen müssen oder die Räume, welche sie in ihren Bewegungen durchlaufen, sind im allgemeinen zu klein, als daß man auf die Veränderung der Richtung der Schwerkraft oder auf die Verschiedenheit der Intensität derselben, wie wir sie später nachweisen werden, Rücksicht zu nehmen brauchte. So lassen sich denn die im vorigen Capitel entwickelten Sätze unmittelbar auf die Wirksamkeit der Schwerkraft in Beziehung auf verschiedene Körper oder die Theile eines und desselben Körpers anwenden.

§. 73. In einem Systeme, das aus mehreren schweren unter sich unveränderlich verbundenen Punkten gebildet ist, sind die bezüglichen Gewichte dieser materiellen Punkte ebenso viele vertikale, folglich unter sich parallele, Kräfte, welche auf sie wirken. Bezeichnen wir mit P das eine dieser Gewichte, mit x, y, z die Entfernungen des materiellen

Punktes von drei rechtwinklichten Ebenen; so ergeben sich aus §. 50 folgende Formeln für die Entfernung X, Y, Z des Mittelpunktes der Parallelkräfte von denselben Ebenen

$$X = \frac{S.Px}{S.P}, \quad Y = \frac{S.Py}{S.P}, \quad Z = \frac{S.Pz}{S.P}.$$

In unserm Falle, wo die Gewichte wirken, heißt der Mittelpunkt der Parallelkräfte Schwerpunkt. Die voranstehenden Formeln geben also die Coordinaten des Schwerpunkts mehrerer schweren materiellen Punkte als Functionen der Coordinaten dieser Punkte und ihrer Gewichte.

§. 74. Die Lage des Schwerpunktes gegen die Theile des Systems bleibt stets dieselbe für alle möglichen Lagen des Systems im Raume. Das System würde im Gleichgewicht sein, wenn der Schwerpunkt fest würde. Das Gewicht aller materiellen Punkte wird also getragen, als ob alle Theile des Systems in diesem Punkte vereinigt wären, wenn man den Schwerpunkt unterstützt.

§. 75. Man kann die Formeln von §. 73 auch dann anwenden, wenn man statt eines Systems von materiellen schweren Punkten ein aus Körpern, die Ausdehnung haben, gebildetes System betrachtet. Man nimmt dann die zu jedem der Schwerpunkte dieser Körper gehörenden Coordinaten x, y, z; X, Y, Z sind die Coordinaten ihres gemeinsamen Schwerpunkts.

§. 76. Ebenso verfährt man, wenn man den gemeinsamen Schwerpunkt der Theile ein und desselben Körpers aufsuchen soll. Gewöhnlich ist ein Körper nicht gleichartig, so daß nicht alle seine Theile dieselbe Dichtigkeit oder gleiches Gewicht bei gleichem Volumen haben. Vermittels der Coordinaten x, y, z beziehen wir die Lage der verschiedenen Punkte des Körpers auf drei rechtwinklichte Ebenen. Bezeichnen wir nun durch ϖ das Gewicht der Volumenseinheit für den Theil des Körpers in dem Punkte, dessen

Coordinaten x, y, z sind; so wird das Gewicht des in diesem Punkte liegenden Elements des Volumens $dx.dy.dz$ durch $\varpi.dx.dy.dz$ ausgedrückt und die Momente dieses Gewichtes in Beziehung auf die drei Axen genommen resp. durch $\varpi.x.dx.dy.dz$, $\varpi.y.dx.dy.dz$, $\varpi.z.dx.dy.dz$. Nennt man also P das Gesammtgewicht des Körpers, X, Y, Z die Coordinaten seines Schwerpunkts; so folgt aus den in I. Cap. XXVIII und XXIX des Lehrb. der Diff. Rechn. gegebenen Sätzen

$$P=\int dx\int dy\int dz.\varpi,$$

$$X=\frac{\int dx.x\int dy\int dz.\varpi}{P},$$

$$Y=\frac{\int dx\int dy.y\int dz.\varpi}{P},$$

$$Z=\frac{\int dx\int dy\int dz.z.\varpi}{P}.$$

Die Größe ϖ muß gegeben sein und zwar als Function der Coordinaten x, y, z; man setzt ihren Werth in die obigen Formeln hinein. Die Gestalt der den Körper begrenzenden Oberfläche muß gleichfalls durch eine Gleichung zwischen x, y und z gegeben sein. Die Integrale sind jedesmal zwischen den Werthen jeder Coordinate, die den Grenzen des Körpers angehören, zu nehmen. Man muß also 1) das erste Integral in Beziehung auf z zwischen den durch x und y in der Gleichung der Oberfläche gegebenen Werthen von z nehmen; 2) das zweite Integral in Beziehung auf y zwischen dem größten und dem kleinsten Werthe von y, der aus der Gleichung der Oberfläche durch Veränderung von z allein sich ergiebt; diese Werthe sind in x ausgedrückt; 3) das dritte Integral in Beziehung auf x zwischen dem größten und dem kleinsten Werthe von x, welche der Gleichung der Oberfläche Genüge leisten.

Läßt sich die Oberfläche eines Körpers etwa nicht durch eine einzige Gleichung bestimmen; so zerlegt man die bestimmten Integrale in mehrere Theile, deren Werthe man so, wie eben gesagt ist, einzeln berechnet.

§. 77. Wenn die Dichtigkeit gleichmäßig ist; so wird ϖ ein constanter Factor, welcher in den Ausdrücken für X, Y, Z verschwindet, so daß dieselben diese Form annehmen:

$$X = \frac{\int dx . x \int dy \int dz}{A}, \quad Y = \frac{\int dx \int dy . y \int dz}{A},$$

$$Z = \frac{\int dx \int dy \int dz . z}{A},$$

wo A das Volumen des Körpers bezeichnet.

§. 78. Bisweilen ist die eine Dimension des Körpers, dessen Schwerpunkt gesucht werden soll, sehr klein: man nennt dies den Schwerpunkt einer Fläche suchen. Ist diese Fläche durch eine Gleichung zwischen der Coordinate z und den Abscissen x und y gegeben, und ist ϖ der Werth des Gewichts für eine Flächeneinheit der Fläche in dem Punkte, dessen Abscissen x und y sind; so wird das Gewicht des in diesem Punkte liegenden Flächenelements durch

$$\varpi dx . dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}$$

ausgedrückt. Bezeichnen wir, wie oben, durch P das Gesammtgewicht des Körpers, durch X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunkts; so ist

$$P = \int dx \int dy . \varpi \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1},$$

und

$$X = \frac{\int dx . x \int dy . \varpi \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{P},$$

$$Y = \frac{\int dx \int dy \, . \, y \, . \, \varpi \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{P},$$

$$Z = \frac{\int dx \int dy \, . \, \varpi \, . \, z \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{P}.$$

Bevor man integriert, muß man in diese Formeln die Werthe von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ in x und y, welche die bekannte Gleichung der Fläche giebt, hineinsetzen. Die Grenzen der Integrale werden durch die den Grenzen der Fläche angehörenden Werthe von x und y bestimmt. Ebenso muß man für ϖ seinen Werth als Function von x und y substituieren.

§. 79. Bei gleichförmiger Dichtigkeit haben wir einfach

$$X = \frac{\int dx \, . \, x \int dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{A},$$

$$Y = \frac{\int dx \int dy \, . \, y \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{A},$$

$$Z = \frac{\int dx \int dy \, . \, z \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{A},$$

wenn wir den Flächeninhalt der Fläche durch A bezeichnen.

§. 80. Sind in dem zur Untersuchung vorliegenden Körper zwei Dimensionen sehr klein, so nennt man unsere Aufgabe den Schwerpunkt einer Linie suchen. Diese Linie sei durch zwei Gleichungen zwischen y und x, und z und x gegeben. Bezeichnen wir nun durch ϖ den Werth des Gewichts für eine Längeneinheit der Linie in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y und z sind; so ist das Gewicht des Linienelements in diesem Punkte

$$\varpi dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Folglich, wenn P das Gesammtgewicht der Linie, X, Y, Z die Coordinaten ihres Schwerpunkts sind; so ist

$$P = \int dx \,.\, \varpi \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

$$X = \frac{\int dx \,.\, \varpi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P},$$

$$Y = \frac{\int dx \,.\, \varpi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P},$$

$$Z = \frac{\int dx \,.\, \varpi z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P}.$$

Der Werth von ϖ, der als Function von x gegeben sein muß, wie die Werthe von y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, welche gleichfalls als Functionen von x gegeben sind, müssen in diese Formeln hineingesetzt werden. Die Integrale müssen zwischen den Werthen von x, welche den Endpunkten der gegebenen Linie angehören, genommen werden.

§. 81. Wenn gleiche Stücke dieser Linie überall gleiches Gewicht haben, so gehen diese Formeln in folgende über:

$$X = \frac{\int dx \,.\, x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A},$$

$$Y = \frac{\int dx \,.\, y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A},$$

$$Z = \frac{\int dx \,.\, z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A}.$$

Hier bezeichnet A die Länge der Linie.

§. 82. Es erleichtert zuweilen die Rechnung, die Punkte der Körper auf andere Coordinaten zu beziehen, welche besser, als rechtwinklichte, für ihre Gestalt sich eignen. Wir wollen uns nicht dabei aufhalten die allgemeinen Formeln zu entwickeln, welche auf diese Weise gewonnen und stets aus denselben Prinzipien abgeleitet werden. Zuweilen läßt sich ein Körper unmitlelbar in differentielle Elemente zerlegen und es genügt alsdann eine einzige Operation um den Schwerpunkt zu bestimmen. Wenn ein gleichförmiger Körper durch eine Ebene in symmetrische Theile zerlegt werden kann, oder allgemeiner, wenn ein beliebiger Körper sich durch eine Vertikalebene in zwei Theile zerlegen läßt, deren Gewichte sich um eine in dieser Ebene liegende, horizontale Axe einander das Gleichgewicht halten; so liegt der Schwerpunkt nothwendigerweise in diesen Ebenen. Zuweilen ergiebt sich dieser Punkt schon allein durch diese Untersuchung. Manchmal braucht man nur noch zwei oder eine einzige Coordinate dieses Punktes zu bestimmen.

§. 83. Sollen wir z. B. den Schwerpunkt eines Rotationskörpers aufsuchen, welcher durch Umdrehung einer Curve, deren Ordinate y als Function der Abscisse x gegeben ist, um die Axe der x gebildet ist; so liegt natürlich dieser Schwerpunkt in der Axe der x. Man kann ferner unmittelbar durch senkrecht gegen jene Axe gelegte Ebenen den Körper in differentielle Elemente zerfällen. Da nun das differentielle Element des Volumens $= \pi . y^2 dx$ ist; so finden wir, wenn der Körper gleichartig ist, die Abscisse X des Schwerpunkts des Volumens durch die Formel

$$X = \frac{\int x y^2 \, dx}{\int y^2 dx}.$$

§. 84. Das differentielle Element der Oberfläche desselben Körpers ist

$$2\pi y\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

folglich ist die Abscisse X des Schwerpunkts der Fläche

$$X = \frac{\int xy\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\int y\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Statt y und $\frac{dy}{dx}$ muß man in diese Formeln ihre durch die Gleichung der erzeugenden Curve gegebenen Werthe in x substituieren. Das Integral muß zwischen den Werthen von x genommen werden, die den Grenzen des zur Untersuchung vorliegenden Körpers angehören.

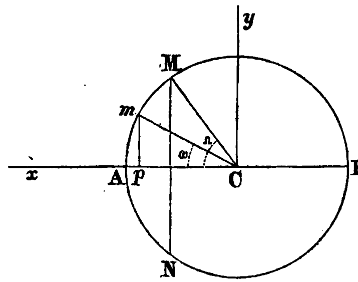
Auf ähnliche Weise bestimmt man den Schwerpunkt des Volumens oder der Oberfläche eines Segments, welches durch eine gegen eine der Hauptaxen senkrechte Ebene von einem Ellipsoid abgeschnitten ist, weil der gesuchte Schwerpunkt natürlich in dieser Axe liegen muß.

§. 85. Wir wollen eine Anwendung der obigen Sätze auf die einfachsten Fälle geben.

Der Schwerpunkt einer geraden mit gleichmäßig vertheiltem Gewichte belasteten Linie liegt selbstverständlich in der Mitte ihrer Länge.

Nennen wir in dem Kreisbogen AM (Fig. 17) einen beliebigen Punkt m, den zwischen dem Durchmesser AB und dem Halbmesser Cm dieses Punktes liegenden Winkel ω, den Halbmesser des Bogens r; so ist das in m liegende Längenelement des Bogens $r\,d\omega$, der Abstand

Fig. 17.



Cp vom Mittelpunkte ist $r\cos.\omega$, und wenn wir durch Ω den durch den Radius CM (welcher nach dem Endpunkt des Bogens gezogen ist) mit AB gebildeten Winkel bezeichnen; so ist die Entfernung X des Schwerpunkts dieses Bogens vom Mittelpunkte C

$$X = \frac{\int_0^\Omega r d\omega . r\cos.\omega}{r\Omega} \quad \text{oder} \quad r\frac{\sin.\Omega}{\Omega}.$$

Es würde demnach das Gewicht des Sinus des Bogens AM am andern Ende B des horizontalen Durchmessers AB um den Mittelpunkt C dem Gewichte dieses Bogens das Gleichgewicht halten.

§. 86. Nach I. §. 325 des Lehrb. der Diff. Rechn. findet man die Länge des vom Scheitelpunkt der Curve aus gerechneten Bogens einer Cycloide durch die Formel

$$s = 2\sqrt{2Ry}, \quad \text{daher} \quad ds = dy\sqrt{\frac{2R}{y}},$$

wo die Ordinate y gleichfalls vom Scheitelpunkt der Curve aus gezählt ist. Wenn wir die Coordinaten des Schwerpunkts dieses Bogens auf denselben Punkt beziehen, so finden wir:

$$X = \frac{\int_0^y x dy\sqrt{\frac{2R}{y}}}{2\sqrt{2Ry}} \quad \text{oder} \quad X = \frac{\int_0^y \frac{x dy}{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}},$$

$$Y = \frac{\int_0^y y dy\sqrt{\frac{2R}{y}}}{2\sqrt{2Ry}} \quad \text{oder} \quad Y = \frac{\int_0^y dy\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}.$$

Da nun

$$\int\frac{x dy}{\sqrt{y}} = 2x\sqrt{y} - 2\int dx\sqrt{y},$$

und (wenn man in die in I. §. 178 des Lehrb. der Diff. Rechn. gegebene Differentialgleichung der Cycloide $(2R-y)$ statt y setzt),

$$dx = \frac{dy\sqrt{2R-y}}{\sqrt{y}}$$

ist; so findet man

$$\int \frac{x\,dy}{\sqrt{y}} = 2x\sqrt{y} - 2\int dy\sqrt{2R-y}$$
$$= 2\left\{ x\sqrt{y} + \tfrac{2}{3}(2R-y)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Folglich ist

$$X = x - \tfrac{2}{3}\left[(2R)^{\frac{3}{2}} - (2R-y)^{\frac{3}{2}}\right], \quad Y = \tfrac{1}{3}y.$$

Die Entfernung des Schwerpunkts des Bogens vom Scheitelpunkte der Curve ist dem dritten Theile der Ordinate des Endpunkts dieses Bogens gleich.

§. 87. Sollen wir den Schwerpunkt der Fläche eines Dreiecks suchen, so nehmen wir um die Formeln zu vereinfachen den Scheitelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten und legen die Axen so, daß die der y der Grundlinie parallel ist. Wenn nun die Richtungen der anliegenden Seiten durch die Gleichungen $y = px$, $y = qx$ gegeben sind, und ist a die Höhe des Dreiecks; so reducieren sich, da uns eine Ebene vorliegt, die Formeln des §. 79 auf

$$X = \frac{\int dx\,.\,x\int dy}{A}, \quad Y = \frac{\int dx\int dy\,.\,y}{A};$$

und weil die auf y bezüglichen Integrale zwischen den Grenzen $y = px$ und $y = qx$ genommen werden müssen, so erhalten wir

$$X = \frac{\int_0^x dx\,.\,x^2(q-p)}{\frac{1}{2}a^2(q-p)}, \quad Y = \frac{\int_0^a dx\,.\,\frac{1}{2}x^2(q^2-p^2)}{\frac{1}{2}a^2(q-p)},$$

also $X = \frac{2}{3}a$, $Y = \frac{1}{3}a(q+p)$.

Der Schwerpunkt liegt in dem Punkte, welcher vom Scheitelpunkt aus zwei Drittel der geraden Linie abschneidet, die von diesem Punkte aus zur Mitte der Grundlinie gezogen ist.

Man gelangt einfacher zu diesem Resultate, wenn man beachtet, daß das Dreieck durch zur Grundlinie parallele Linien in differentielle Elemente zerlegt werden kann, deren aller Schwerpunkte in der geraden Linie liegen, welche die Spitze des Dreiecks mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet. Der Flächeninhalt des in der Entfernung x vom Anfangspunkte der Coordinaten liegenden Elements ist $dx.x(q-p)$; es folgt daraus

$$X = \frac{\int_0^x dx.x^2(q-p)}{\frac{1}{2}a^2(q-p)} = \frac{2}{3}a.$$

Nach Anleitung des §. 75 bestimmt man auch den Schwerpunkt jeder geradlinig begrenzten Figur, wenn man den Schwerpunkt des Dreiecks kennt.

§. 88. Um den Schwerpunkt des Kreisabschnitts MAN zu bestimmen (Fig. 17) genügt es die Hälfte desselben MAP zu betrachten und allein durch die Formel

$$X = \frac{\int dx.xy}{A}$$

die Entfernung des Schwerpunkts dieser Hälfte vom Mittelpunkte C zu bestimmen. Rechnen wir unter Beibehaltung der in §. 85 gewählten Bezeichnungen die x vom Punkte C aus, so ist

$$x = r\cos.\omega, \quad dx = -r\sin.\omega.d\omega, \quad y = \sin.\omega.$$

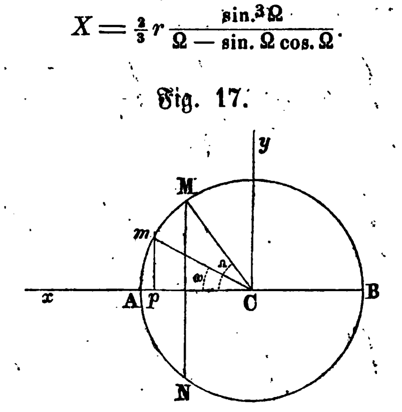
So ergiebt jene Formel

$$X = \frac{\int_0^\Omega r^3\sin.^2\omega.\cos.\omega.d\omega}{\frac{1}{2}r^2(\Omega - \sin.\Omega\cos.\Omega)}$$

oder

$$X = \frac{2}{3} r \frac{\sin.^3 \Omega}{\Omega - \sin.\Omega \cos.\Omega}.$$

Fig. 17.



§. 89. Da der Kreisausschnitt $CMAN$ vom Mittelpunkte aus in unendlich kleine Dreiecke zerlegt werden kann, deren Schwerpunkte sämmtlich um $\frac{2}{3}$ des Halbmessers vom Mittelpunkte entfernt sind; so ist die Entfernung seines Schwerpunktes vom Mittelpunkt C durch die Formel des §. 85 gegeben, multipliciert mit $\frac{2}{3}$ oder

$$X = \frac{2}{3} r \frac{\sin.\Omega}{\Omega}.$$

§. 90. Zur Bestimmung des Schwerpunkts der dreiseitigen Pyramide lege man den Anfangspunkt der rechtwinklichten Coordinaten in ihre Spitze; zugleich mögen zwei ihrer Seitenebenen in die Ebenen der xy und xz fallen und die Grundfläche sei der Ebene der yz parallel. Sind nun $y = px$ und $z = qx$ die Gleichungen der beiden schrägen in der Spitze sich schneidenden Kanten; so ist die Gleichung der Ebene, welche die dazugehörende Seitenfläche enthält, $z = qx - \frac{q}{p} y$. Ferner kann man die drei Seiten der Grundfläche durch a, pa und qa darstellen; der Inhalt der

Pyramide ist also $\frac{1}{2}pqa^2 . \frac{1}{3}a = \frac{1}{6}pqa^3$. Nach den Formeln des §. 77 ergiebt sich hier:

$$X = \frac{\int_0^a dx . x \int_0^{px} dy \int_0^{qx - \frac{q}{p}y} dz}{\frac{1}{6}pqa^3},$$

$$Y = \frac{\int_0^a dx \int_0^{px} dy . y \int_0^{qx - \frac{q}{p}y} dz}{\frac{1}{6}pqa^3},$$

$$Z = \frac{\int_0^a dx \int_0^{px} dy \int_0^{qx - \frac{q}{p}y} dz . z}{\frac{1}{6}pqa^3};$$

wenn man also die bezeichneten Operationen ausführt:

$$X = \frac{3}{4}a, \quad Y = \frac{1}{4}pa, \quad Z = \frac{1}{4}qa.$$

Der Schwerpunkt der Pyramide liegt folglich in dem Punkte, der von der Spitze aus $\frac{3}{4}$ der Verbindungslinie der Spitze und des Schwerpunkts der Grundfläche abschneidet.

Da in dieser Verbindungslinie die Schwerpunkte aller differentiellen Elemente liegen, in welche die Pyramide durch der Basis parallele Schnitte zerlegt wird; so kann man zu den nämlichen Resultaten einfacher gelangen. Das Volumen des in der Entfernung x von der Spitze liegenden Elements ist $\frac{1}{2}pqx^2dx$; demnach ist:

$$X = \frac{\int_0^a dx . \frac{1}{2}pqx^3}{\frac{1}{6}pqa^3} = \frac{3}{4}a.$$

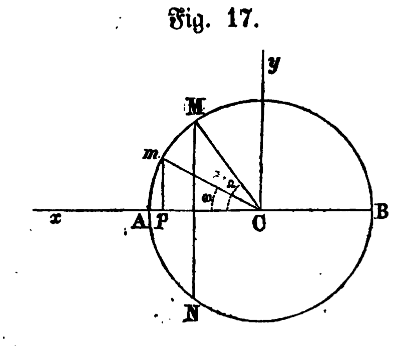
Das gewonnene Resultat ist auch dann das nämliche, wenn die zwei Seitenebenen der Pyramide nicht senkrecht

auf der Grundfläche stehen, wie vorausgesetzt ist; selbst für den Fall, daß die Grundlinie derselben ein beliebiges Vieleck ist.

Wenn der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide bekannt ist, so kann man auch den Schwerpunkt jedes von Ebenen begrenzten Polyeders bestimmen.

§. 91. Mit Hülfe der in §. 83 und §. 84 gegebenen Formeln läßt sich bequem der Schwerpunkt des Inhalts, wie der Oberfläche eines Kugelabschnitts finden. (Fig. 17.)

Fig. 17.



In dem durch Umdrehung des Bogens AM um den Durchmesser AC gebildeten Kugelabschnitt ist, wenn die x vom Mittelpunkte aus gezählt werden, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, wo r den Kugelhalbmesser bezeichnet. Wir finden nach der Formel des §. 83 demnach

$$X = \frac{\int_x^r dx \, . \, x(r^2 - x^2)}{\int_x^r dx(r^2 - x^2)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{r^4 - 2r^2x^2 + x^4}{2r^3 - 3r^2x + x^3}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{y^4}{2r^2 - 3r^2x + x^3}$$

als Entfernung des Schwerpunkts dieses Körpers vom Mittelpunkt C; x ist die Entfernung CP. Schneidet man x auf dem Halbmesser ab und setzt es $= r - f$, so daß der Pfeil AP mit f bezeichnet ist; so ist die Entfernung des Schwerpunkts C vom Punkte P

$$\frac{3}{4}\frac{r^2}{3r-f}.$$

Setzt man $x = 0$ oder $f = r$, so ist die Entfernung des Schwerpunkts der Halbkugel vom Mittelpunkt $C = \frac{3}{8}r$.

§. 92. Der Schwerpunkt der Oberfläche dieses Kugelabschnitts wird nach der Formel des §. 84 bestimmt:

$$X = \frac{\int_x^r dx \,.\, x}{\int_x^r dx} = \tfrac{1}{2}(r + x);$$

der Schwerpunkt liegt also in der Mitte des Pfeils AP.

§. 93. Um endlich den Schwerpunkt des Kugelausschnitts zu bestimmen, der durch Umdrehung des gemischtlinigen Dreiecks CMA um den Durchmesser AC gebildet ist (s. Fig. 17), kann man diesen Kugelausschnitt in unendlich kleine Pyramiden zerlegen, deren Spitzen in C, und deren Grundebenen in der convexen Oberfläche des Kugelausschnitts liegen. Nach §. 90 liegen die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden in der Oberfläche eines Kugelausschnitts, dessen Halbmesser zu dem des gegebenen sich wie drei zu vier verhält und der überall von denselben Halbmessern, wie der gegebene, begrenzt wird. Der Schwerpunkt dieser Kugelfläche ist demnach der gesuchte Schwerpunkt des Kugelabschnitts. Die Entfernung desselben vom Punkte P ist also

$$\tfrac{3}{8}r(1 - \cos.\Omega).$$

Wird $\Omega = \frac{\pi}{2}$, so wird der Kugelausschnitt zur Halbkugel und man erhält dasselbe Resultat, wie in §. 91.

Benutzung der Schwerpunkte zur Berechnung der Flächen- und Körperinhalte.

§. 94. Es sei eine beliebige Linie in einer Ebene gezogen; wenn diese Ebene sich senkrecht gegen eine andere beliebige gegebene Linie bewegt und eine unendlich wenig von ihrer ursprünglichen verschiedene Lage annimmt, so beschreibt die erstgenannte Linie eine unendlich kleine Fläche, und die Fläche, welche jene Linie auf der Ebene begrenzt, einen unendlich kleinen Körper. Offenbar ist erstens das Maß für diese unendlich kleine Fläche das Product aus der Länge der Erzeugungslinie in die unendlich kleine Linie, um welche ihr Schwerpunkt verschoben ist. Es ist nämlich diese Fläche gleich dem Producte aus der Länge der Erzeugungslinie in das Mittel des von jedem ihrer Punkte durchlaufenen Weges. Die Berechnung dieses mittlern Weges unterscheidet sich aber nicht von der Berechnung der Entfernung zweier auf einander folgender Lagen des Schwerpunkts der Curve. Wenn man demnach den Schwerpunkt der Erzeugungslinie bestimmt hat, so findet man den Inhalt der von dieser Linie dadurch beschriebenen Fläche, daß die Ebene, in der sie liegt, sich senkrecht gegen eine beliebige Linie bewegt: man hat nur die Länge jener Linie mit der Linie zu multiplicieren, welche ihr Schwerpunkt durchlaufen hat.

§. 95. Es folgt zweitens, daß der Rauminhalt des unendlich kleinen Körpers, welchen die durch die gegebene Linie in der Ebene eingeschlossene Fläche bildet, wenn jene Ebene um ein unendlich kleines Stück verschoben wird, dem

Producte der gegebenen Fläche in die durch ihren Schwerpunkt durchlaufene unendlich kleine Linie gleich ist. Denn dieser Körperinhalt ist gleich dem Producte aus der erzeugenden Fläche in die Linie, welche das Mittel aller durch ihre Punkte durchlaufenen Linien ist. Man kann also den Inhalt des Körpers, welchen jene Fläche beschreibt, wenn die Ebene derselben sich senkrecht gegen eine Linie bewegt, durch Multiplication der Fläche mit der von ihrem Schwerpunkt durchlaufenen Linie berechnen.

Diese beiden Sätze lassen sich besonders auf die Berechnung des Inhalts der Rotationsflächen und =Körper anwenden. Diese Größen sind unmittelbar bekannt, wenn man die Länge der Meridiancurven, den Inhalt der von ihnen begrenzten Ebenen und die Lage ihrer Schwerpunkte bestimmt hat. Man erkennt jedoch leicht, daß diese Sätze sich nur auf die Fälle anwenden lassen, wo der Umriß der erzeugenden Curve sich gänzlich und beständig auf ein und derselben Seite der geraden Linien befindet, in denen sich die Ebene dieser Curve in ihren successiven Lagen schneidet.

VI. Grundbegriffe der Dynamik.

---

§. 96. Die Dynamik entlehnt ebenso, wie die Statik, einige Grundbegriffe von der täglichen Erfahrung. Bei einigen dieser Grundbegriffe ist die Gewißheit von selbst einleuchtend; bei andern ist sie nicht so leicht zu erkennen, kann aber dessen ungeachtet nicht in Zweifel gezogen werden, nachdem man durch vielfältige Vergleichungen sich überzeugt hat, daß die durch unwiderlegliche Verstandesschlüsse daraus

abgeleiteten Folgerungen mit den Erscheinungen der Natur übereinstimmen.

§. 97. Die Schwere ist eine allen Körpern gemeinsame Eigenschaft. Vermöge einer gegenseitigen Einwirkung, deren Natur und Ursprung uns gänzlich unbekannt ist, werden alle Körper gegen den Mittelpunkt der Erde hingezogen; die Erde selbst und die Planeten sind derselben Einwirkung unterworfen und ziehen sich gegenseitig an. Durch reine Abstraction könnte man sich die Körper ohne diese Eigenschaft denken, aber in Wirklichkeit ist sie von dem Begriff Körper untrennbar. Jeder Körper ist schwer; in dem Streben sich der Erde zu nähern übt er einen Druck aus, welchen man aufheben muß, wenn der Körper unbeweglich bleiben soll; das Gewicht ist das Maß dieses Drucks. Verschiedene Gewichte vergleicht man durch Zurückführung derselben auf ein als Einheit angenommenes Gewicht.

In Frankreich ist die Gewichtseinheit das Kilogramm, das Gewicht eines Cubikdecimeter distillierten Wassers im Maximum der Dichtigkeit.

§. 98. Der Begriff der Masse bezieht sich auf die Menge der materiellen Theile, aus denen, wie man sich denkt, jeder Körper zusammengesetzt ist. Wenn man zwei gleichartige Körper vergleicht, z. B. zwei Stück Eisen, so lehrt die Erfahrung, daß die Gewichte derselben dem Volumen proportional sind; ebenso sind die in einem jeden enthaltenen Mengen materieller Theile offenbar dem Volumen proportional, so daß in diesem Falle die Masse nothwendigerweise dem Gewichte proportional ist. Derselbe Satz läßt sich aber auch auf alle Fälle ausdehnen, weil wir annehmen, daß die Schwerkraft auf alle materiellen Theile gleichmäßig wirkt, und die Einwirkung dieser Kraft auf jeden Körper als Merkmal und gewissermaßen als Maß

der Menge der ihn bildenden materiellen Theile betrachten. Für uns unterscheiden sich die Körper demnach nur durch die verschiedenen Mengen von Materie, die in einem und demselben gegebenen Volumen enthalten sind. So dürfen wir das Grundgesetz aufstellen, das man als Definition ansehen muß: die Masse der Körper ist dem Gewichte derselben proportional.

Die Bestimmung der Massen in Zahlen erfordert keine besondere Art von Einheit; weiter unten werden wir nachweisen, wie man mit Hülfe anderer Einheiten sie vergleichen kann.

Von dem Begriff des Körpers ist der der Masse untrennbar. Wenn die Physik die Existenz einiger Agentien in der Natur nachweist, welche Eindruck auf unsere Sinne machen, ohne daß sie jedoch Masse zu haben scheinen; so sind dies nicht eigentlich so genannte Körper, wenigstens nicht solche, auf welche die Theorien der Mechanik angewandt werden können.

§. 99. Da im menschlichen Geiste die Idee der verfließenden Zeit und der Begriff der Verschiedenheit der Größe verschiedener Zeiträume liegt; so ergiebt sich daraus als nothwendige Folgerung die Möglichkeit die Zeit zu messen, indem man die Zeiträume mit einem bestimmten als Einheit gewählten Zeitraum vergleicht. Die Sätze der Dynamik erfordern, daß die Zeit als meßbare Größe angesehen werde.

Die jetzt allgemein angenommene Zeiteinheit ist die sechzigtheilige Secunde, $\frac{1}{3600}$ der Stunde oder $\frac{1}{86400}$ des mittlern Tages.

§. 100. Das Wort Bewegung bezeichnet die Erscheinung, daß ein materieller Körper seinen Ort verändert und in dem Maße, wie die Zeit verläuft, verschiedene Lagen im Raume einnimmt. Ein Körper geht nie von einer Lage in die andere über, ohne der Reihe nach alle zwischen beiden

liegenden Lagen einzunehmen. Es verfließt ferner stets einige Zeit zwischen dem Augenblicke, in welchem der Körper seine erste Lage verläßt und demjenigen Augenblicke, wo er in seiner letzten Lage angekommen ist. Die Aufeinanderfolge der Lagen der verschiedenen Punkte des Körpers bildet gerade oder krumme Linien, welche man sich im Raume verzeichnet denken kann. Diese Linien können in längern oder kürzern Zeiträumen beschrieben sein; daraus ergiebt sich der Begriff der Geschwindigkeit. Geschwindigkeit ist nämlich das Verhältniß des durchlaufenen Raums zu der Zeit, welche der Körper dazu gebrauchte den Weg zurückzulegen, oder was auf dasselbe hinauskommt: der in der Zeiteinheit durchlaufene Raum.

§. 101. Die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher in Bewegung ist, braucht nicht gerade constant oder gleichförmig zu sein; die verschiedenen Theile einer von ihm beschriebenen Linie können mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen sein. Ist die Bewegung eines Körpers von der Art, daß seine Geschwindigkeit sich stetig verändert in dem Maße, wie die Zeit verläuft und der Körper neue Lagen im Raume einnimmt; so paßt der oben erwähnte Begriff der Geschwindigkeit nicht mehr. Man muß diesen Begriff alsdann so fassen, daß man sich denkt, daß die Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke constant wird und nun den Raum nimmt, den der Körper mit dieser Geschwindigkeit durchlaufen würde.

§. 102. Eine Eigenschaft der Körper, die nicht weniger allgemein ist, als die Schwerkraft, wird mit dem Worte Trägheit bezeichnet: es ist die Eigenschaft, daß der jedesmalige Zustand der Ruhe oder der Bewegung eines Körpers nur durch Einwirkung einer fremden, von außen auf den Körper wirkenden Ursache verändert wird. Ein Körper in Ruhe, auf den keine Ursache von außen einwirkt oder

der nur sich gegenseitig aufhebenden Einwirkungen unterworfen ist, bleibt fortwährend in Ruhe. Ist der Körper in Bewegung, so wird er fortdauernd diese Bewegung beibehalten, d. h. er wird sich fortwährend in derselben Richtung und mit der nämlichen Geschwindigkeit bewegen, indem er stets geradlinig in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft.

Diese, Trägheit benannte, Eigenschaft muß als der Materie inhärierend gedacht werden; ihre Existenz wird uns durch alle Erscheinungen in der Natur bewiesen. Der Begriff der Trägheit ist eng mit dem der Masse verbunden: jede Menge eines Stoffs, welcher schwer ist und Masse hat, setzt dem Streben sie zu bewegen einen Widerstand entgegen, der nur durch eine Kraft überwunden werden kann.

§. 103. Wir bezeichnen demnach mit dem Worte **Kraft** jede Ursache, welche im Stande ist einen ruhenden, materiellen Körper in Bewegung zu setzen oder die Bewegung eines solchen Körpers zu verändern. Bewegung eines Körpers besteht, um eine genauere Definition dieses Wortes zu geben, darin, daß eine gegebene Masse mit einer gegebenen Geschwindigkeit ihren Ort verändert. Wenn man verschiedene Bewegungen mit einander vergleicht; so stellt man sich eine Bewegung um so größer vor, 1) je größer die bewegte Masse ist; 2) je größer die dieser Masse ertheilte Geschwindigkeit ist. **Das Product der Masse eines Körpers in seine Geschwindigkeit** wird die **Größe der Bewegung** desselben genannt und wird als Maß der Bewegung angesehen. Hiernach beurtheilen wir auch die relative Größe der Kräfte; d. h. wir vergleichen die Größe der Ursachen, welche Bewegung hervorzurufen oder zu hemmen vermögen unter sich nach der Größe der Bewegung, die sie hervorrufen oder hemmen können.

Man bestimmt also eine Kraft, wenn man angiebt, daß sie fähig ist einer gewissen Masse eine gewisse Geschwindigkeit zu ertheilen: dadurch werden die Kräfte meßbare Größen und unter sich durch Zahlenverhältnisse vergleichbar; es ist das Produkt einer Masse in die Geschwindigkeit, welche die Kraft der Masse zu ertheilen im Stande ist, die Verhältnißzahl, welche die relative Größe der Kraft bezeichnet.

Demnach sieht man zwei Kräfte als gleich an, wenn sie zwei Körpern solche Größen der Bewegung ertheilt haben, daß die Geschwindigkeiten sich umgekehrt, wie die Massen verhalten. Dieser Satz stimmt vollständig mit der Erfahrung; diese lehrt nicht allein, daß gleiche Massen mit gleicher Geschwindigkeit gegen einander stoßend gegenseitig ihre Bewegung aufheben, sondern auch, daß ungleiche Massen, welche mit Geschwindigkeiten, die sich umgekehrt, wie die Massen, verhalten, gegen einander stoßen, gleichfalls gegenseitig ihre Bewegung aufheben. Auch ertheilt das Aufschnellen einer und derselben Feder den Körpern stets um so größere Geschwindigkeit, je kleiner deren Massen sind.

§. 104. Um eine vollständige Erklärung des Begriffs Kraft zu geben, müssen wir noch bemerken, daß mehrere Naturkräfte, z. B. die Schwerkraft, stetig und ohne Aufhören wirken. Ein der Einwirkung einer solchen Kraft unterworfener Körper strebt eine fortwährend wachsende Geschwindigkeit anzunehmen. Folglich läßt sich eine Kraft dieser Art nicht so definieren, daß man allein angiebt, sie sei im Stande einer bestimmten Masse eine bestimmte Geschwindigkeit zu ertheilen, sondern man muß nothwendig bei dieser Erklärung auf die Zeit Rücksicht nehmen, während der diese Kraft wirkt: in ihre Definition muß mit aufgenommen werden, daß sie in einer bestimmten Zeit einer gewissen Masse eine gewisse Geschwindigkeit ertheilen könne.

Die Kraft muß als um so größer angesehen werden, je größer Masse und Geschwindigkeit sind und je kleiner die Zeit ist. Die Größe der Kraft wird durch die Zahl ausgedrückt, die wir durch Multiplikation der Masse mit der in der Zeiteinheit ertheilten Geschwindigkeit erhalten.

§. 105. Die Schwerkraft, d. h. die gegenseitige Anziehung der Körper ist rücksichtlich der durch sie hervorgebrachten Erscheinungen die allgemeinste und wichtigste aller Kräfte und ihre Natur und ihre Wirkungen sind am besten bekannt. Die Natur der Schwerkraft (die wir hier allein in den Wirkungen berücksichtigen, welche sie auf der Oberfläche der Erde hervorbringt; erst später werden wir sie aus einem allgemeinern und wahrern Gesichtspunkten betrachten) besteht darin, daß sie 1) gleichmäßig auf alle materiellen Theile wirkt, so daß sie allen Körpern völlig dieselbe Geschwindigkeit ertheilt; 2) daß ihre stetige und stets gleiche Wirksamkeit immer die nämliche ist, mag der ihr unterliegende Körper in Ruhe oder schon in Bewegung sein. Ein Körper, auf den die Schwerkraft wirkt, gewinnt in einer Zeiteinheit und nach Richtung der Vertikallinie stets dieselbe Geschwindigkeit, mag er aus dem Zustande der Ruhe heraustreten oder sich in beliebiger Richtung mit beliebiger Geschwindigkeit bewegen; d. h. die Geschwindigkeit, mit der er sich gerade bewegt, wird in einer Zeiteinheit stets um dieselbe Größe vermehrt. Der Zuwachs an Geschwindigkeit, den die Schwerkraft den Körpern ertheilt, beträgt zu Paris für eine Secunde 9,80896 Meter. Durch Angabe dieser Zahl ist diese Kraft definiert.

Alles dieses ist auf Thatsachen begründet und beruht auf Beobachtungen; später werden wir wissenschaftlich den Beweis dafür liefern.

§. 106. Nach dem obigen begreift man leicht, auf welche Einheit die Verhältnißzahlen, welche die Werthe der

Massen bezeichnen, die man in die Formeln der Dynamik einführen muß, zu beziehen sind. Die Wirksamkeit der Schwerkraft auf ein und denselben Körper kann zwei ganz verschiedene Wirkungen hervorbringen: 1) Wenn der Körper unbeweglich erhalten wird, so besteht die Wirkung derselben in einem Druck gegen das Hinderniß und dieser Druck wird gemessen durch das, was man Gewicht des Körpers nennt; bezeichnen wir dieses mit P, so stellt P eine Zahl von Kilogrammen oder Pfunden dar. 2) Wenn dagegen der Körper der Einwirkung der Schwerkraft völlig frei unterliegt, so gewinnt er in der Zeiteinheit, in der Secunde, die Geschwindigkeit von 9,80896 Meter; nennen wir demnach die Masse des Körpers m, jene Geschwindigkeit g, das eine Zahl von Metern oder überhaupt Längeneinheiten bezeichnet; so ist das Product mg die Größe der Bewegung, welche die Schwerkraft dem Körper in der Zeiteinheit ertheilt: nach §. 103 und 104 muß dies Product als Maß der Kraft betrachtet werden. Nun ist die Schwerkraft als eine stets gleichmäßig auf alle Körper wirkende Kraft, wenn sie verschiedene Wirkungen hervorbringt, je nachdem der Körper frei ist oder durch ein Hinderniß zurückgehalten wird, augenscheinlich in jedem Falle durch die hervorgebrachten Wirkungen zu messen. Folglich ist die Zahl P und die Zahl mg gleichmäßig geeignet den Werth dieser Kraft auszudrücken und es sind beide Zahlen aus diesem Grunde nothwendig proportional. Da die Zahlen P und g allein von willkührlichen Einheiten, den Gewichts-, Längen- und Zeiteinheiten, abhängen, kann man selbst schreiben $P = mg$. Auch die Einheit der Masse ist vollkommen willkührlich und man kann sie stets so wählen, daß jene Gleichung besteht.

Man folgert aus derselben

$$m = \frac{P}{g};$$

die Zahl, welche die Masse eines Körpers darstellt, ist der Quotient aus dem Gewicht des Körpers und der Geschwindigkeit, welche die Schwerkraft den ihrer Einwirkung unterliegenden Körpern in der Zeiteinheit ertheilt. Diesem Satze gemäß müssen die Formeln der Mechanik aufgefaßt werden.

§. 107. Wenn andererseits ein Körper von der Masse m durch die Einwirkung einer beliebigen Kraft bewegt in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g erhält, so daß sich die Größe der Bewegung des Körpers in der Zeiteinheit um mg vermehrt; so würde die Kraft nach Richtung ihrer Einwirkung gegen ein beliebiges Hinderniß, welches den Körper zwänge seine jetzige Geschwindigkeit zu behalten und sich der Beschleunigung der Bewegung, welche die Kraft hervorzubringen strebt, widersetzte, einen Druck hervorbringen, den in Zahlen das Product mg darstellt. Dies Product ist das Maß für das Gewicht des Körpers, indem ja dies Gewicht das Resultat der Einwirkung der Kraft ist, welche den materiellen Theilen in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g zu ertheilen strebt.

Die Erscheinung, daß an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche der Werth von g und das Gewicht der Körper in gleichem Verhältnisse sich ändern, beweist die Richtigkeit der letzten Erklärungen. Man erweist letzteres, indem man vermittels der Gewichte Federn zusammendrückt.

Die Lehre von der Dynamik beruht auf den hier entwickelten Begriffen. Der Verfasser hat gesucht klar und scharf diese Begriffe darzulegen; es ist jedoch schwer sie in ihrer ganzen Abstraktheit ohne Kenntniß der Entwicklung und Anwendung derselben völlig zu fassen; erst dann überzeugt man sich vollständig von der Richtigkeit derselben, wenn man erkennt, daß die aus ihnen abgeleiteten Resultate

wirklich ein treues Bild der Erscheinungen der Natur und die wahrhaften Gesetze dieser Erscheinungen geben.

VII. Geradlinige Bewegung der Körper.

§. 108. Mit Hülfe der mathematischen Analysis vermag man am leichtesten die Gesetze der Erscheinungen, die Gegenstand der Dynamik sind, zu entwickeln. In der Geometrie bestimmt man gewöhnlich die Lage eines Punktes, indem man seine Entfernung von drei rechtwinklichten, als fest angesehenen Ebenen angiebt. Wenn der Punkt in Bewegung ist, und successive verschiedene Lagen im Raume einnimmt; so werden die Entfernungen x, y und z veränderliche Größen, deren Werthe in dem Maße, wie die Zeit verfließt, sich ändern und folglich Functionen der Zeit t sind, welche von einem bestimmten zum Anfangspunkt gewählten Augenblicke an verflossen ist. Sind die Werthe von x, y und z als Functionen von t bekannt, so kann man in jedem beliebigen Augenblicke die Lage des Punkts bestimmen und es ist folglich die Natur seiner Bewegung völlig bekannt.

§. 109. Wir haben zunächst den Fall zu untersuchen, daß ein materieller Punkt (d. h. eine gewisse Menge von Materie, welche wir uns in ein unendlich kleines Volumen concentriert denken) sich geradlinig bewegt, was offenbar voraussetzt, daß die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft, wenn eine solche vorhanden ist, nach Richtung dieser geraden Linie wirkt. Dann genügt es, um in jedem Augenblicke die Lage des materiellen Punktes zu bestimmen, eine einzige Ordinate x, die von einem festen Anfangspunkte aus gezählt wird, anzunehmen, so daß man sie als Function

der Zeit t ansieht. Die Gleichung

$$x = \varphi(t)$$

drückt die Beschaffenheit der Bewegung aus: x ist die von einem festen Anfangspunkte aus gerechnete Entfernung, in der sich der Körper am Ende der Zeit t befindet und t ist die unabhängige Veränderliche.

Die durch den Körper angestrebte Bewegung, deren Natur durch die Function $\varphi(t)$ ausgedrückt ist, ist demnach nothwendiges Resultat verschiedener Umstände. Der einer gewissen Zeit t zugehörende Werth der Entfernung x hängt ab 1) von dem Orte, in welchem sich der Körper in dem Augenblick befand, in welchem man angefangen hat die Zeit zu zählen; 2) von der Geschwindigkeit, die er in diesem Augenblicke hatte; 3) von der Größe der constanten oder mit der Zeit veränderlichen Kraft, welche auf den Körper während der ganzen Dauer der Zeit t wirkt. Wenn die anfängliche Lage und Geschwindigkeit des Körpers und die auf ihn wirkende Kraft als Functionen der Zeit gegeben sind, so muß man daraus auf die Form der Function $\varphi(t)$ schließen können; ist umgekehrt die Function $\varphi(t)$ gegeben, so erkennt man aus ihr den Werth der Geschwindigkeit des materiellen Punkts am Ende einer beliebigen Zeit und den Ausdruck für die Kraft, welche die Bewegung des Punktes hervorbringt.

1) Nach §. 100 und 101 ist Geschwindigkeit das Verhältniß zwischen dem durchlaufenen Raume und der Zeit, welche verflossen ist, während er denselben durchlief, oder auch der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg. Bezeichnet man mit Δt eine gewisse Zeit, welche nach der Zeit t verflossen ist, mit Δx den während dieser Zeit durchlaufenen Weg; so stellt das Verhältniß $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ die Geschwindigkeit dar, falls der Werth dieses Verhältnisses constant ist oder Δx und

Δt proportional sind. Gewöhnlich aber hängt der Werth des vorliegenden Verhältnisses von der absoluten Größe der Zunahme Δt ab und man darf darum offenbar diesem Zuwachse keinen bestimmten, endlichen Werth beilegen, weil 1] dieser Werth willkührlich sein, und 2] man den Werth der am Ende der Zeit t statthabenden Geschwindigkeit von den Modificationen abhängig machen würde, welche in der Bewegung des materiellen Punktes etwa nach dieser Zeit eintreten könnten. Deshalb muß die Zunahme Δt kleiner, als jede gegebene Größe, also unendlich klein, angenommen werden; oder man muß den Grenzwerth, dem sich $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ immer mehr nähert, je näher Δt der 0 kommt, als Ausdruck der Geschwindigkeit am Ende der Zeit t nehmen und dieser Grenzwerth ist nichts anderes, als der Differentialquotient $\frac{dx}{dt}$. Aus diesen Betrachtungen, die denen in I. §. 5 u. ff. des Lehrb. der Diff. Rechn. völlig analog sind, folgt, wenn man durch u die Geschwindigkeit des materiellen Punkts am Ende der Zeit t bezeichnet, aus der Gleichung $x=\varphi(t)$ stets

$$u=\frac{dx}{dt} \quad \text{oder} \quad u=\frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit wird also durch den ersten Differentialquotienten des analytischen Ausdrucks dargestellt, welcher den am Ende der Zeit t durchlaufenen Weg als Function dieser Zeit giebt.

§. 110. 2) Der Werth der auf den Körper am Ende der Zeit t wirkenden Kraft wird, wie aus §. 104 u. ff. hervorgeht, durch die Größe der Bewegung gemessen, welche die Kraft in der Zeiteinheit ertheilt, d. h. durch das Product der Masse des Körpers in die Größe, um welche die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit wächst. Ist nun allgemein Δt eine beliebige nach der Zeit t verflossene Zeit, Δu die

Zunahme, welche die Geschwindigkeit u während dieser Zeit erlangt hat; so ergiebt das Verhältniß $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ die in der Zeiteinheit erlangte Zunahme, wenn der Werth dieses Verhältnisses constant, oder wenn Δt der Zunahme Δu proportional ist. Da dies gewöhnlich nicht der Fall ist; so ergeben ähnliche, wie die im vorigen §. angestellten Betrachtungen, daß die in der Zeiteinheit hinzugekommene Geschwindigkeit durch den Grenzwerth ausgedrückt werden muß, dem sich Δu nähert, wenn Δt kleiner und kleiner wird, also durch den Differentialquotienten $\frac{du}{dt}$. Es ist also

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}$$

der Ausdruck der Geschwindigkeit, welche die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft am Ende der Zeit t diesem materiellen Punkte in der Zeiteinheit ertheilt. Diese Geschwindigkeit wird demnach durch den ersten Differentialquotienten des Ausdrucks für die Geschwindigkeit des materiellen Punktes als Function der Zeit, oder durch den zweiten Differentialquotienten des Ausdrucks für den durchlaufenen Raum als Function der Zeit dargestellt.

Bezeichnen wir die Masse des materiellen Punktes durch m, so ist die dem materiellen Punkte in der Zeiteinheit ertheilte Größe der Bewegung

$$m\frac{du}{dt} = m\frac{d^2 x}{dt^2} = m\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}.$$

Nach §. 107 geben diese Ausdrücke in Gewichtseinheiten den am Ende der Zeit t auf den materiellen Punkt durch die auf ihn wirkende Kraft geübten Druck.

§. 111. Die einfachste Form, unter der die Gleichung $x = \varphi(t)$ sich darstellen kann, ist

$$x = a + bt, \text{ also } \frac{dx}{dt} = b \text{ und } \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

wo a und b Constanten bezeichnen. Hier stellt offenbar 1) die Constante a die Entfernung dar, in welcher sich der materielle Punkt in dem Augenblicke, wo man zu zählen anfängt, von dem Anfangspunkte der x befindet; 2) durchläuft der materielle Punkt in gleichen Zeiten gleiche Räume; er bewegt sich also gleichmäßig und die Constante b repräsentiert seine Geschwindigkeit; 3) wirkt keine Kraft auf den materiellen Punkt. Er bewegt sich allein durch die Wirkung der Geschwindigkeit, welche ihm vor dem Augenblicke ertheilt ist, in welchem man die Zeit zu zählen anfängt und seine Bewegung erhält sich unverändert.

Man nennt die obige Gleichung **Gleichung der gleichförmigen Bewegung.**

§. 112. Es sei ferner

$$x = a + bt + ct^2, \text{ also } \frac{dx}{dt} = b + 2ct \text{ und } \frac{d^2x}{dt^2} = 2c,$$

wo a, b und c Constanten sind. Augenscheinlich ist 1) hier, wie im vorigen §., a die ursprüngliche Entfernung des materiellen Punktes vom Anfangspunkte der x; 2) die Constante b ist der Anfangswerth der Geschwindigkeit des materiellen Punkts; diese Geschwindigkeit wächst der Zeit proportional und ihre Zunahme beträgt in jeder Zeiteinheit $2c$; 3) der materielle Punkt unterliegt der Einwirkung einer unveränderlichen Kraft, die ihm in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit gleich dem Doppelten der Constante c ertheilt. Bezeichnet man mit m die Masse des materiellen Punkts, so übt jene Kraft gegen denselben beständig einen Druck, der in Gewichtseinheiten ausgedrückt $= 2mc$ ist.

Man nennt die Bewegung, welche die voranstehende Gleichung ausdrückt, **gleichförmig beschleunigte Bewegung**, weil die Geschwindigkeit mit der Zeit wächst und zwar in gleichen Zeiträumen um gleiche Größen. Wir setzen hier die Constanten b und c als positiv voraus.

§. 113. Diese Beispiele genügen zum Nachweise, wie in der Gleichung $x = \varphi(t)$ der Ausdruck für die Natur der geradlinigen Bewegung enthalten ist, nämlich für die Geschwindigkeit des Körpers in einem gegebenen Augenblicke, für den Werth der in einem gegebenen Augenblicke auf den Körper wirkenden Kraft und für den anfänglichen Zustand des Körpers, d. h. seine Lage und seine Geschwindigkeit im Anfangspunkte der Bewegung. Natürlich, wenn andererseits der Werth der auf den Körper wirkenden Kraft als Function von t gegeben ist, oder der zweite Differentialquotient der Function $x = \varphi(t)$, giebt eine erste Integration den Ausdruck für die Geschwindigkeit u als Function von t oder den ersten Differentialquotienten jener Function; eine zweite Integration giebt den Ausdruck für jene Function selbst. Die Betrachtung des Anfangszustandes des Körpers ergiebt leicht die bei dieser Integration einzuführenden Constanten. Meistens jedoch ist bei den Anwendungen auf die Natur der Ausdruck für die auf die Körper wirkenden Kräfte nicht als Function der Zeit gegeben; die Werthe dieser Kräfte hängen von der Lage, in der die Körper sich gerade befinden oder von der ihnen gerade eignen Geschwindigkeit ab; und dies macht die Bestimmung der Bewegungen, welche aus der Einwirkung gegebener Kräfte hervorgehen, manchmal schwierig.

Geradlinige Bewegung eines Körpers durch Einwirkung der Schwerkraft.

§. 114. Die Schwerkraft ertheilt, wie aus den §. 103, 104 und 105 gegebenen Erklärungen erhellt, den Körpern, welche ihrer Einwirkung frei unterliegen, in gleichen Zeiträumen gleiche Zunahmen an Geschwindigkeit. Man definiert deshalb die Natur der durch Einwirkung dieser Kraft hervorgerufenen Bewegung dadurch, daß man angiebt, daß

die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleichförmig wächst. Die Gleichung von §. 112

$$x = a + bt + ct^2$$

drückt diese Beziehung aus; denn wir haben nachgewiesen, daß bei der Bewegung, welche sie darstellt, die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die constante Größe $2c$ wächst. Die Beobachtung lehrt nun wirklich, daß die Fallbewegung schwerer Körper die in §. 112 erwähnten Eigenschaften hat.

Bezeichnet man ferner, wie es gewöhnlich geschieht, durch g die Geschwindigkeit, welche sie den freifallenden schweren Körpern in einer Secunde ertheilt (für Paris 9,80896 Meter); so muß man offenbar $2c = g$ oder $c = \frac{1}{2}g$ setzen, so daß die Formel

$$x = a + bt + \tfrac{1}{2}gt^2$$

den genauen Ausdruck für die Bewegung der schweren Körper giebt: x ist eine vertical von oben nach unten von einem festen Punkte aus gezählte Abscisse, a die Entfernung des Körpers von diesem festen Punkte in dem Augenblicke, wo man anfängt die Zeit zu zählen, b die Geschwindigkeit des Körpers in diesem nämlichen Augenblicke, also die Anfangsgeschwindigkeit.

§. 115. Für den besondern Fall, daß der Körper vom Anfangspunkte der x aus ohne Anfangsgeschwindigkeit fällt, ist einfach

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2;$$

bezeichnet man mit u die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, so ist

$$u = \frac{dx}{dt} = gt.$$

Die durchlaufenen Räume, die wir mit x bezeichnet haben, verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Zeiten; die Geschwindigkeit wächst der Zeit proportional.

Aus den beiden obigen Gleichungen lassen sich die neuen ableiten:

$$u = \sqrt{2g \cdot x} \quad \text{und} \quad x = \frac{u^2}{2g}.$$

Ein von der Höhe x herabgefallener Körper hat demnach die Geschwindigkeit $\sqrt{2g \cdot x}$ erlangt. Man spricht dies Resultat gewöhnlich so aus: die zur Höhe x gehörige Geschwindigkeit $= \sqrt{2g \cdot x}$. Umgekehrt nennt man die Höhe $\frac{u^2}{2g}$, von der herab ein Körper fallen muß, um die Geschwindigkeit u zu erlangen, die zur Geschwindigkeit u gehörige Höhe. Man hat in der Mechanik, besonders in der Hydraulik die zu bestimmten Höhen gehörigen Geschwindigkeiten und zu bestimmten Geschwindigkeiten gehörigen Höhen häufig zu berücksichtigen und es sind deshalb Tafeln für ihre einander entsprechenden Werthe berechnet.

§. 116. Wir haben in der Gleichung

$$x = a + bt + \tfrac{1}{2}gt^2$$

die Constanten a, b und g positiv genommen. Da jedoch das Vorzeichen von a von der Lage des materiellen Punkts gegen den Anfangspunkt der x in dem Augenblick, von dem aus man die Zeit zu zählen anfängt, abhängig ist; so muß man a negativ setzen, wenn der materielle Punkt jenseits des Anfangspunktes liegt. Das Vorzeichen von b hängt von der Richtung der ursprünglichen Bewegung des Körpers ab; wenn diese Richtung derartig ist, daß die Bewegung die Abscisse x zu vermindern sucht, muß man b negativ nehmen. Endlich muß man g das Vorzeichen $+$ geben, wenn man die Abscisse x von oben nach unten, also nach Richtung der Fallbewegung zählt; im entgegengesetzten Falle muß man ihm das Vorzeichen $-$ geben.

Die Gleichung

$$x = -bt + \tfrac{1}{2}gt^2,$$

welche als Ausdruck der Geschwindigkeit giebt

$$u = \frac{dx}{dt} = -b + gt,$$

stellt demnach die Bewegung eines schweren Körpers dar, welcher mit der Geschwindigkeit b in die Höhe geworfen ist. Die Einwirkung der Schwerkraft vermindert die Geschwindigkeit des Körpers in arithmetischer Progression, nach der Zeit $\frac{b}{g}$ ist dieselbe $= 0$; zugleich ist der vertical von unten nach oben durchlaufene Raum $= \frac{b^2}{2g}$, also die zur Geschwindigkeit b zugehörige Höhe. Der Körper steigt demnach gegen die Richtung der Schwerkraft gerade bis zu der Höhe, von der er, um seine Anfangsgeschwindigkeit zu erlangen, hätte herabfallen müssen. In diesem Punkte angelangt fällt der Körper wiederum mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab.

Geradlinige Bewegung eines schweren Körpers, dessen Bewegung durch einen Widerstand verändert wird.

§. 117. In den vorigen §§. ist die Natur der Bewegung eines Körpers entwickelt, der ohne Widerstand zu treffen frei der Einwirkung der Schwere unterliegt. In Wirklichkeit ist dies jedoch nicht so, weil der Widerstand der flüssigen Medien, in denen die Körper sich bewegen, oder andere Hindernisse die Fallbewegung verändern.

Nach den in §. 105 und 106 gegebenen Erklärungen ist, wenn m die Masse eines Körpers ist, die Einwirkung der Schwerkraft auf diesen Körper durch das Gewicht mg dargestellt. Diese Einwirkung ist der einer Hand vergleichbar, die dem Körper folgend ihn mittels einer Feder, die

fortwährend so zusammengepreßt sein müßte, wie es durch das Gewicht mg der Fall sein würde, fortstößt. Diese Einwirkung der Schwerkraft überwindet den Widerstand, den die Trägheit des Körpers dem Streben seine Bewegung zu ändern entgegensetzt; sie vermehrt beständig die Geschwindigkeit des Körpers in der Zeiteinheit um die Größe g. Wenn diese Einwirkung aufhörte oder wenn eine gleiche nach der entgegengesetzten Seite wirkende Einwirkung sie aufhöbe, so würde die Geschwindigkeit des Körpers nicht mehr wachsen, seine Bewegung würde eine gleichförmige.

§. 118. Man kann sich den Widerstand, welcher die Bewegung der fallenden Körper ändert, ebenso versinnlichen, indem man sich denselben unter dem Bilde einer Hand vorstellt, welche mittels einer gespannten Feder nach der der Richtung der Bewegung gerade entgegengesetzten Richtung auf den Körper wirkte. Wenn also F der Werth des aus dem Widerstande hervorgehenden Drucks in Gewichtseinheiten ist (des Drucks also, mit welchem die Feder zusammengepreßt sein müßte); so ist der Körper, welchen die Schwerkraft mit dem Druck mg vorwärts, der Widerstand mit dem Druck F nach der andern Seite oder rückwärts treibt, in der nämlichen Lage, als ob er durch den Druck $mg - F$ allein nach der Richtung der Schwerkraft vorwärts bewegt würde; es erlangt folglich der Körper in der Zeiteinheit nicht mehr die Geschwindigkeit g, sondern nur die Geschwindigkeit $\frac{mg-F}{m}$ oder $g - \frac{F}{m}$.

Behält man die in §. 109 u. ff. gebrauchten Zeichen bei, daß x der am Ende der Zeit t durchlaufene Raum, u die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit oder $u = \frac{dx}{dt}$ ist; so läßt sich in unserm Falle die Bewegung des Körpers durch die Gleichung ausdrücken

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = g - \frac{F}{m}.$$

Ist der Werth von F gegeben und der ursprüngliche Zustand des Körpers bekannt, so kann man immer aus dieser Gleichung die Beschaffenheit der Bewegung ableiten.

Meistens hängt bei praktischen Anwendungen die durch F bezeichnete Einwirkung des Widerstandes von dem jedesmaligen Werthe der Geschwindigkeit u ab und muß deshalb als Function dieser Geschwindigkeit betrachtet werden. Schreibt man also statt F in der obigen Formel $\varphi(u)$, so ist

$$\frac{du}{dt} = g - \frac{1}{m}\varphi(u);$$

demnach ist

$$dt = \frac{du}{g - \frac{1}{m}\varphi(u)} \quad \text{oder} \quad t = \int_U^u \frac{du}{g - \frac{1}{m}\varphi(u)};$$

durch U ist die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet. Aus der so gewonnenen Relation zwischen u und t bestimmt man weiter den Ausdruck für x als Function von t, indem man an die Stelle von u den in Werthen von t dafür gewonnenen Ausdruck hineinsetzt in die Gleichung

$$dx = u \,.\, dt, \quad \text{also} \quad x = \int_0^t u \,.\, dt.$$

Zuweilen ist es leichter x als Function von u zu bestimmen, indem man statt dt den Werth dafür in u und du ausgedrückt in dieselbe Gleichung substituiert. Man erhält dadurch

$$dx = \frac{u \,.\, du}{g - \frac{1}{m}\varphi(u)} \quad \text{und} \quad x = \int_U^u \frac{u \,.\, du}{g - \frac{1}{m}\varphi(u)}.$$

Wenn integriert ist, kann man nach Belieben wieder statt u seinen Werth in t an die Stelle setzen.

§. 119. Wir wollen im Folgenden die einfachsten Formen betrachten, die man der Function $\varphi(u)$ geben kann.

Setzt man zunächst $\varphi(u) = A$, wo A eine Constante bezeichnet; so übt der Widerstand einen stets gleichen, von der Geschwindigkeit des Körpers unabhängigen Druck, dessen Werth in Gewichtseinheiten A ist. Die Bewegung ist dann der in §. 114 und 115 untersuchten völlig analog, wenn man nur an die Stelle von g die Größe $g - \frac{A}{m}$ setzt. Die Bewegung ist gleichfalls gleichförmig beschleunigt, aber die Beschleunigung ist weniger schnell und zwar um so weniger, je kleiner die Masse des Körpers ist.

§. 120. Wenn man zweitens $\varphi(u) = A + Bu$ setzt; so denkt man sich, daß der Druck des Widerstandes aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, deren einer constant, der andere der Geschwindigkeit proportional ist. Dann ist also

$$dt = \frac{du}{g - \frac{A}{m} - \frac{B}{m}u},$$

und das Intregral davon

$$t = Const. - \frac{m}{B}.l\left(g - \frac{A}{m} - \frac{B}{m}u\right).$$

Bezeichnen wir die Anfangsgeschwindigkeit durch U und bestimmen die Constante so, daß $u = U$, wenn $t = 0$; so erhalten wir

$$t = \frac{m}{B}.l\frac{mg - A - BU}{mg - A - Bu}.$$

Es folgt daraus

$$u = \left(U - \frac{mg - A}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}.t} + \frac{mg - A}{B}.$$

Durch e bezeichnen wir die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Die Geschwindigteit nähert sich ohne Aufhören der Grenze $\frac{mg - A}{B}$, ohne sie streng genommen anders, als nach unendlich großer Zeit zu erreichen; sie nähert sich

jedoch dieser Grenze um so rascher, je kleiner die Masse m ist. Die Bewegung des Körpers nähert sich dann ohne Aufhören der gleichförmigen Bewegung, von der sie bald nicht mehr merklich abweicht, so daß der Körper in der Zeiteinheit den Weg $\frac{mg-A}{B}$ zurücklegt. Alsdann ist $mg = A + Bu$, der Widerstand ist gleich dem Gewichte des Körpers.

Man hat ferner

$$dx = dt\left[\left(U - \frac{mg-A}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}.t} + \frac{mg-A}{B}\right];$$

wenn man integriert und die Constante so bestimmt, daß $x = 0$, wenn $t = 0$; so ist

$$x = \frac{m}{B}\left(U - \frac{mg-A}{B}\right)\left(1 - e^{-\frac{B}{m}.t}\right) + \frac{mg-A}{B}.t,$$

der Ausdruck für den am Ende der Zeit t durchlaufenen Raum.

§. 121. Setzen wir endlich noch $\varphi(u) = A + Bu + Cu^2$, so daß wir uns also den Widerstand als aus drei Theilen zusammengesetzt denken, von denen der eine constant, der zweite der Geschwindigkeit, der dritte dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist; so ist

$$dt = \frac{du}{g - \frac{A}{m} - \frac{B}{m}u - \frac{C}{m}u^2} = \frac{m.du}{mg - A - Bu - Cu^2}.$$

Das Integral davon ist, wenn $mg - A$ als positiv angesehen wird,

$$t = \frac{m}{\sqrt{B^2 + 4C(mg-A)}}.l\frac{\sqrt{B^2+4C(mg-A)} + B + 2Cu}{\sqrt{B^2+4C(mg-A)} - (B+2Cu)} + \text{Const.}$$

Bestimmt man die Constante so, daß $u = U$, wenn $t = 0$; so ist

$$t = \frac{m}{\sqrt{B^2 + 4C(mg-A)}}.$$

$$l.\left[\frac{\sqrt{B^2+4C(mg-A)} + (B+2Cu)}{\sqrt{B^2+4C(mg-A)} - (B+2Cu)}.\frac{\sqrt{B^2+4C(mg-A)} - B + 2CU}{\sqrt{B^2+4C(mg+A)} - B + 2CU}\right]$$

Löst man diese Gleichung in Beziehung auf u auf, so findet man die Geschwindigkeit als Function der Zeit t; dann kann man, wie es im vorigen §. geschehen ist, x als Function von t bestimmen.

§. 122. Wir wollen die Auflösung dieser Aufgabe für den Fall beifügen, daß $A=0$ und $B=0$, der Widerstand also dem Quadrat der Geschwindigkeit allein proportional angenommen wird. Mit dieser Annahme stimmt das Resultat der Beobachtungen über den Fall schwerer Körper in einem flüssigen Medium, wie Luft oder Wasser, fast genau überein. Die obigen Ausdrücke reducieren sich sodann auf folgende

$$dt=\frac{m.du}{mg-Cu^2},$$

$$t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{Cg}}.l\left[\frac{1+u\sqrt{\frac{C}{mg}}}{1-u\sqrt{\frac{C}{mg}}}.\frac{1-U\sqrt{\frac{C}{mg}}}{1+U\sqrt{\frac{C}{mg}}}\right].$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$u=\sqrt{\frac{mg}{C}}.\frac{\left(1+U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right).e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}}-\left(1-U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)}{\left(1+U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right).e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}}+\left(1-U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)}.$$

Die Geschwindigkeit, deren Anfangswerth U ist, nähert sich continuierlich der Grenze $\sqrt{\frac{mg}{C}}$, welche sie streng genommen erst nach unendlich großer Zeit erreicht; sie ist jedoch von derselben schon nach endlicher Zeit nicht mehr merkbar unterschieden und zwar in um so kürzerer Zeit, je kleiner die Masse m ist. Dann ist $Cu^2=mg$, der Widerstand ist dem Gewichte des Körpers gleich. Diese Bewegung hat denselben Charakter, wie die in §. 120 dargestellte.

Setzt man in die Gleichung $dx=u.dt$ statt dt seinen Werth in u, so ist

$$dx = \frac{u \, . \, du}{g - \frac{C}{m} u^2}.$$

Die Integration ergiebt, wenn man die Constante so bestimmt, daß $x = 0$, wenn $u = U$:

$$x = \frac{m}{2C} . \, l \frac{1 - U^2 \frac{C}{mg}}{1 - u^2 \frac{C}{mg}}.$$

Substituiert man hier statt u seinen oben abgeleiteten Werth in t, so ist

$$x =$$

$$\frac{m}{C}\left[l \left\{ \left(1 + U \sqrt{\frac{C}{mg}}\right) . e^{t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} + \left(1 - U \sqrt{\frac{C}{mg}}\right) . e^{-t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} \right\} - l2 \right].$$

§. 123. Setzt man die durch U bezeichnete Anfangsgeschwindigkeit einfach $= 0$, so giebt dies

$$u = \sqrt{\frac{mg}{C}} . \frac{e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} + 1}$$

und

$$x = - \frac{m}{2C} . \, l\left(1 - u^2 \frac{C}{mg}\right)$$

oder auch

$$x = \frac{m}{C}\left[l\left(e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} + 1\right) - t\sqrt{\frac{Cg}{m}} - l2 \right].$$

Nach Verlauf einer bestimmten Zeit darf man diese Formel ohne merklichen Fehler auch so schreiben.

$$x = \frac{m}{C}\left[t\sqrt{\frac{Cg}{m}} - l2 \right] \text{ oder } x = \sqrt{\frac{mg}{C}} . \, t - \frac{m}{C} . \, l2.$$

§. 125. Wir haben von §. 117 an einen fallenden Körper vor Augen gehabt, dessen Bewegung ein nach der entgegengesetzten Richtung hin wirkender Widerstand sich entgegenstellt. Bei dem vertikalen Aufsteigen eines in die

Höhe geworfenen Körpers wirkt der Widerstand nach derselben Richtung, wie die Schwerkraft und man muß daher in den Formeln den Ausdrücken, welche den Werth dieses Widerstandes bezeichnen, die entgegengesetzten Vorzeichen geben. Für den in §. 120 besprochenen Fall erhält man demnach, wenn die x jetzt von unten nach oben gezählt werden,

$$dt = -\frac{du}{g + \frac{A}{m} + \frac{B}{m}u},$$

$$t = \frac{m}{B} . l \frac{mg + A + BU}{mg + A + Bu},$$

$$u = \left(U + \frac{mg + A}{B}\right) e^{-\frac{B}{m}t} - \frac{mg + A}{B},$$

$$x = \frac{m}{B}\left(U + \frac{mg + A}{B}\right)\left(1 - e^{-\frac{B}{m} . t}\right) - \frac{mg + A}{B} . t.$$

Die Geschwindigkeit vermindert sich progressiv und wird $= 0$ nach einer Zeit, deren Werth ist

$$\frac{m}{B} . l \frac{mg + A + BU}{mg + A}.$$

§. 125. In dem Falle von §. 122, daß der Widerstand einfach dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, erhält man, wenn die x von unten nach oben gezählt werden

$$dt = -\frac{m . du}{mg + Cu^2}.$$

Das Integral davon ist

$$t = \text{Const.} - \sqrt{\frac{m}{Cg}} \text{ arc. tang. } u \sqrt{\frac{C}{mg}}$$

oder, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit durch U bezeichnet

$$t = \sqrt{\frac{m}{Cg}} \text{ arc. tang. } \frac{(U - u)\sqrt{Cmg}}{mg + CUu}.$$

Daraus leitet man ab

$$u = \sqrt{\frac{mg}{C}}\,\text{tang.}\left\{\text{arc. tang.}\, U\sqrt{\frac{C}{mg}} - t\sqrt{\frac{Cg}{m}}\right\}.$$

Die Geschwindigkeit wird progressiv kleiner und ist $=0$ nach der Zeit

$$\sqrt{\frac{m}{Cg}}\,\text{arc. tang.}\, U\sqrt{\frac{C}{mg}}.$$

Um den durchlaufenen Raum zu bestimmen setzt man

$$dx = -\frac{u\,.\,du}{g + \frac{C}{m}u^2};$$

daraus folgt

$$x = \frac{m}{2C}\,.\,l\,\frac{mg + CU^2}{mg + Cu^2}.$$

Die Höhe bis zu welcher der Körper steigt ist

$$\frac{m}{2C}\,.\,l\left(1 + \frac{C}{mg}U^2\right).$$

Wenn man statt u den oben abgeleiteten Werth setzt, so erhält man für x folgenden Ausdruck als Function von t

$$x = \frac{m}{C}\,.\,l\left(\cos.\, t\sqrt{\frac{Cg}{m}} + U\sqrt{\frac{C}{mg}}\,.\,\sin.\, t\sqrt{\frac{Cg}{m}}\right).$$

§. 126. Wir können auch einen noch einfachern Fall untersuchen, den nämlich, daß ein Körper ohne der Schwere unterworfen zu sein in einem widerstrebenden Medium nach beliebiger Richtung hin geradlinig sich fortbewegt.

Ist der Widerstand der Geschwindigkeit einfach proportional, so braucht man nur in den §. 120 oder 124 gegebenen Formeln $g=0$, $A=0$ zu setzen. Dann erhält man

$$u = U\,.\,e^{-\frac{B}{m}\cdot t},$$

$$x = \frac{m}{B}\,.\,U\left(1 - e^{-\frac{B}{m}\cdot t}\right);$$

die Geschwindigkeit nimmt mit dem Wachsen der Zeit sehr schnell ab, und obgleich sie strenggenommen erst nach unendlich großer Zeit $= 0$ wird, so ist doch der Raum, den der Körper durchlaufen kann, begrenzt und kann die Größe $\frac{m}{B}.U$ nicht übersteigen.

§. 127. Wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so giebt dies

$$dt = -\frac{m.du}{Cu^2};$$

daraus folgt

$$t = \frac{m}{C}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U}\right),$$

$$u = \frac{U}{\frac{CU}{m}.t + 1},$$

$$x = \frac{m}{C}.l\left(\frac{CU}{m}.t + 1\right).$$

Die Geschwindigkeit nimmt mit der Zeit ab und wird in unendlicher großer Zeit $= 0$; jedoch ist der durchlaufene Raum nicht, wie im vorigen Falle, begrenzt.

Geradlinige Bewegung eines schweren Körpers ober- und unterhalb der Oberfläche der Erde mit Berücksichtigung der Veränderung der Schwerkraft.

§. 128. Die Kraft, welche einen Körper gegen den Mittelpunkt der Erde hinzieht und die wir Schwerkraft nennen, kann meistens bei praktischen Anwendungen als beständig angesehen werden, wenn man nur dieser Kraft den Werth ertheilt, welchen sie jedesmal an dem Orte der Erde, wo man sich gerade befindet, wirklich hat. Dieser Werth ist jedoch nicht allein an verschiedenen Oertern verschieden, sondern nimmt auch an jedem Orte, sobald man sich über die Oberfläche der Erde erhebt, im quadratischen Verhältnisse zu der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde ab; sie

nimmt ebenso im Verhältniß der Entfernung vom Mittelpunkte ab, sobald man unter die Oberfläche der Erde hinabgeht. Mit Berücksichtigung dieser Veränderungen untersuchen wir zunächst die Bewegung eines Körpers, welcher von einer gegebenen Höhe über der Oberfläche der Erde herabfällt.

Die Gleichung der Bewegung ist für den Fall, daß der Körper oberhalb der Oberfläche der Erde sich befindet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{R^2}{(a-x)^2}.$$

In dieser Gleichung ist

g die den schweren Körpern an der Erdoberfläche in der Zeiteinheit durch die Schwerkraft ertheilte Geschwindigkeit;

R der Erdhalbmesser $= \frac{10'000'000}{\frac{1}{2}\pi} = 6'366'198$ Meter;

a die anfängliche Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte der Erde;

x der am Ende der Zeit t vom Körper durchlaufene Raum, von oben nach unten gerechnet.

Multipliciert man beide Glieder mit dx und integriert, so erhält man

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2g\,\frac{R^2}{a-x} + \text{Const.};$$

oder nennt man die dem Körper am Ende der Zeit t ertheilte Geschwindigkeit u,

$$u^2 = 2g\,\frac{R^2}{a-x} + \text{Const.}$$

Wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= 0$ ist, so ist gleichzeitig $x = 0$ und $u = 0$; alsdann giebt die Gleichung

$$u^2 = 2gx\,\frac{R^2}{a(a-x)} \quad \text{und} \quad x = \frac{u^2}{2g}\cdot\frac{1}{\frac{R^2}{a^2} + \frac{u^2}{2ga}}.$$

§. 129. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gR^2x}{a(a-x)}$$

leitet man ab

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2gR^2}} \cdot dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

Dies giebt integriert

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gR^2}} \cdot \left\{ \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \text{arc. cos.} \frac{a-2x}{a} \right\}.$$

Die Constante ist $= 0$, weil man den Raum x von dem Punkte an rechnet, von dem aus der Körper zu fallen anfängt.

§. 130. Der Körper kommt an der Erdoberfläche an, wenn $x = a - R$; dies ergiebt

$$u^2 = 2g(a-R) \cdot \frac{R}{a},$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gR^2}} \left\{ \sqrt{(a-R)R} + \frac{a}{2} \text{arc. cos.} \frac{2R-a}{a} \right\}.$$

§. 131. Wenn der Körper unter die Erdoberfläche hinabfällt, so ist die Gleichung seiner Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \frac{R-x}{R};$$

x bezeichnet die Entfernung des Körpers von der Oberfläche der Erde am Ende der Zeit t und wird von oben nach unten gezählt.

Multipliciert man beide Glieder mit dx und integriert, so erhält man

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{R}(2Rx - x^2) + \text{Const.};$$

oder

$$u^2 = \frac{g}{R}(2Rx - x^2) + \text{Const.}$$

Nennt man U die Geschwindigkeit des Körpers, die er in dem Augenblicke hat, wo er von der Erdoberfläche aus fällt und wo zugleich $x = 0$ ist; so giebt dies

$$u^2 = U^2 + 2gx - \frac{gx^2}{R}.$$

§. 132. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = U^2 + 2gx - \frac{gx^2}{R}$$

folgert man

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{U^2 + 2gx - \frac{gx^2}{R}}}.$$

Das Integral davon ist

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} . \text{arc.cos.}(R - x) \sqrt{\frac{g}{RU^2 + gR^2}} + \text{Const.}$$

Ist $t = 0$, wo zugleich die Entfernung von der Erdoberfläche $x = 0$; so ist das bestimmte Integral

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \left\{ \text{arc.cos.}(R - x) \sqrt{\frac{g}{RU^2 + gR^2}} - \text{arc.cos.} \sqrt{\frac{gR}{U^2 + gR}} \right\}.$$

§. 133. Fällt der Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit 0 von der Oberfläche der Erde aus, so ist

$$u^2 = 2gx - \frac{gx^2}{R} \text{ und } x = R\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{u^2}{gR}}\right);$$

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \text{arc.cos.} \frac{R - x}{R} \text{ und } x = R\left(1 - \cos. t\sqrt{\frac{g}{R}}\right).$$

Aus der Gleichsetzung dieser Werthe von x ergiebt sich

$$u = \sqrt{gR} . \sin. t\sqrt{\frac{g}{R}} \text{ und } t = \sqrt{\frac{R}{g}} . \text{arc.sin.} \frac{u}{\sqrt{gR}}.$$

Der mit der Geschwindigkeit 0 von der Erdoberfläche aus fallende Körper hat im Mittelpunkte der Erde angelangt die Geschwindigkeit $\sqrt{gR}$ erhalten. Da die in §. 131

gegebene Gleichung auch auf den Fall paßt, daß der Körper vom Mittelpunkte der Erde aus fällt, sobald man $x > R$ setzt; so erkennt man, daß der mit dieser Geschwindigkeit sich bewegende Körper über den Erdmittelpunkt hinausfallen, sich darauf mit stets abnehmender Geschwindigkeit weiter bewegen und endlich den entgegengesetzten Punkt der Erdoberfläche in dem Augenblick erreichen wird, wo diese Geschwindigkeit $= 0$ ist. Die Einwirkung der Schwerkraft ertheilt dem fallenden Körper dann wieder eine Bewegung nach der entgegengesetzten Richtung und diese Bewegung ist völlig dieselbe, wie die, welche er bis dahin gehabt hatte. Durch diese Bewegung wird der Körper dann wieder bis zu dem Punkte getragen, von wo er ausgegangen war und wird denselben mit einer Geschwindigkeit wiederum $= 0$ erreichen. Die Bewegung des Körpers würde demnach in diesem Falle aus einer unendlichen Folge von Schwingungen bestehen, wobei der Durchmesser der Erde abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen durchlaufen würde. Die Geschwindigkeit des Körpers ist dann am größten, wenn er durch den Mittelpunkt hindurchgeht, und die Größe derselben nimmt von hier ab nach beiden Seiten hin im Verhältnisse des Sinus der Zeit ab. Die Zeit, welche der Körper gebraucht um die Länge des Erddurchmessers zu durchlaufen, also die Dauer einer halben Schwingung, wird erhalten, wenn man setzt

$$\sin. t\sqrt{\frac{g}{R}} = 0, \text{ oder } t\sqrt{\frac{g}{R}} = \pi, \text{ deshalb } t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}};$$

π bezeichnet den Zahlenwerth des halben Umfangs des Kreises, dessen Radius $= 1$ ist.

VIII. Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines freien materiellen Punktes, auf welchen beliebige Kräfte wirken.

§. 134. In den eben gelösten Aufgaben war die Bewegung des materiellen Punktes geradlinig; diese geradlinige Bewegung wurde selbst nicht durch Einwirkung mehrerer Kräfte, der Schwerkraft, der Wurfkraft, des Widerstandes der flüssigen Medien, verändert, weil diese entweder nach derselben oder nach direct entgegengesetzten Richtungen wirkend gedacht wurden. Wir müssen jetzt auf den allgemeinen Fall übergehen, daß der Körper unter Einwirkung beliebiger Kräfte eine Bewegung annimmt, deren Geschwindigkeit und Richtung sich mit der Zeit und der Lage des Körpers verändern können.

In §. 103, 104, 105, 106 und 117 haben wir die Erklärung des Begriffs Kraft und die Art ihrer Berechnung gegeben. Wir betrachten hier Kräfte von stetiger Wirksamkeit, wie die Schwerkraft. Es ist möglich, daß die Einwirkung derselben nur sehr kurze Zeit dauert; dies ist ein besonderer Umstand, auf den man vorkommenden Falls Acht haben muß. Streng genommen ist in der Natur keine Einwirkung eine augenblickliche, dauerlose, wie man dies allenfalls in rein mathematischer Abstraction annehmen kann, um die es sich hier nicht handelt. Den Werth einer Kraft bestimmt man auf doppelte Art, indem man entweder in Gewichtseinheiten den gegen den Körper geübten Druck angiebt oder in Längeneinheiten die Geschwindigkeit, welche sie einer bestimmten Masse in der Zeiteinheit ertheilt. Nennt man jenen Druck P und diese Geschwindigkeit, welche ein Körper von der Masse m in der Zeiteinheit unter Einwirkung der Kraft erlangt, g; so besteht nothwendigerweise zwischen diesen drei Größen die Beziehung, daß $P = mg$.

Die Richtung der Kraft bestimmt man, wie in §. 20 nachgewiesen ist, indem man die Winkel angiebt, welche die Richtung derselben mit drei festen rechtwinklichten Axen einschließt.

Ebenso ist in §. 108 erläutert, wie man die Bewegung eines Körpers bestimmt, indem man in jedem Augenblicke aus den Werthen der drei rechtwinklichten Coordinaten, die man als veränderliche Functionen der Zeit annimmt, auf seine Lage schließt.

§. 135. Bei der einem Körper ertheilten Geschwindigkeit wirken nothwendigerweise zusammen: 1) die Anfangsgeschwindigkeit, mit der er in den Raum geschleudert wird; 2) die Einwirkung der auf den Körper wirkenden Kräfte. Es ist demnach unsere Aufgabe die Bewegung des Körpers zu bestimmen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit und die Kräfte gegeben sind. Zuweilen liegt auch die umgekehrte Aufgabe vor, zu bestimmen, wenn die Bewegung des Körpers gegeben ist, welche Anfangsgeschwindigkeit ihm ertheilt war und welche Kräfte auf ihn wirken.

Die Differentialrechnung ist ganz besonders geeignet diese Aufgaben zu lösen; denn aus ihr können wir unmittelbar die allgemeinen für die ganze Dauer der Einwirkung gültigen Beziehungen zwischen den veränderlichen Coordinaten des materiellen Punktes, welche wir als Functionen der Zeit erhalten, und den Werthen der Kräfte geben. Es werden also Differentialgleichungen der zweiten Ordnung aufgestellt werden, welche integriert werden müssen und deren Constanten durch eine besondere Untersuchung über die anfängliche Lage und Geschwindigkeit des materiellen Punkts sich bestimmen lassen.

§. 136. Denken wir uns einen materiellen Punkt von der Masse m in Bewegung; so ist, wenn seine Entfernungen von drei rechtwinklichten festen Ebenen am Ende der Zeit t

durch x, y, z bezeichnet werden, die Bewegung dieses Punktes dem oben Gesagten gemäß durch drei solche Gleichungen bestimmt:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \varpi(t).$$

φ, ψ und ϖ sind Zeichen für Functionen. Durch Eliminierung von t aus diesen drei Gleichungen erhält man zwei Gleichungen unter den Coordinaten x, y und z und diese Gleichungen gehören natürlich der durch den bewegten Körper beschriebenen geraden oder krummen Linie an. Es handelt sich darum aus jenen drei Gleichungen die Beschaffenheit der durch sie dargestellten Bewegung zu erkennen, d. h. also aus ihnen die Fragen zu beantworten: welches ist am Ende einer beliebigen Zeit t die Richtung der durch den materiellen Punkt beschriebenen Linie, welches ist seine Geschwindigkeit, welches die Richtung und die Intensität der auf ihn wirkenden Kraft?

§. 137. Setzen wir zunächst

$$x = A + at, \quad y = B + bt, \quad z = C + ct,$$

wo die Buchstaben A, B, C, a, b, c Constanten bezeichnen; so ist klar, daß A, B und C die drei Coordinaten des Punktes sind, in welchem sich der materielle Punkt in dem Augenblicke befindet, wo man die Zeit t zu zählen anfängt. Da jedoch nichts hindert den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt zu verlegen, so kann man die Gleichungen einfacher so schreiben

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct.$$

Aus denselben folgt, daß die drei Projectionen des materiellen Punkts auf den Axen sich auf denselben mit gleichförmigen Geschwindigkeiten bewegen; die Constanten a, b und c sind die Werthe dieser Geschwindigkeiten.

Durch Eliminierung von t erhält man

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \frac{c}{a}x$$

als Gleichungen der durch den materiellen Punkt beschriebenen Linie. Diese Linie ist folglich eine gerade und ihre Projectionen auf den Ebenen der xy und xz bilden mit der Axe der x Winkel, deren Tangenten bezüglich durch $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ ausgedrückt werden. Die Entfernung des materiellen Punkts vom Anfangspunkte der Coordinaten am Ende der Zeit t ist

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

der materielle Punkt bewegt sich also geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Die Richtung der Bewegung des materiellen Punkts bildet mit den Axen der x, y und z Winkel, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Aus der Gleichförmigkeit dieser geradlinigen Bewegung schließt man leicht, daß keine Kraft auf den Punkt einwirkt; seine Geschwindigkeit ist ihm vor dem Augenblicke ertheilt, in welchem man die Zeit zu zählen anfängt.

§. 138. Da aus den drei Geschwindigkeiten a, b, c des Körpers nach Richtung der drei Axen hervorgeht, daß die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ist; so kann man die drei Geschwindigkeiten a, b und c als die drei Componierenden der Geschwindigkeit des Körpers ansehen und umgekehrt die Geschwindigkeit $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ als die Resultierende der drei Geschwindigkeiten a, b und c. Die Geschwindigkeiten werden folglich nach denselben Gesetzen zusammengesetzt und zerlegt, wie die Kräfte in der Statik.

Sind V und V' zwei Geschwindigkeiten, die nach Richtung zweier Linien wirken, welche mit den drei recht=

wirklichten Axen die Winkel α, β, γ und α', β', γ' einschließen; so kann man diese als Resultierende von je drei nach Richtung der Axen wirkenden Geschwindigkeiten ansehen, deren Werthe resp. $V.\cos.\alpha$, $V.\cos.\beta$, $V.\cos.\gamma$ für die erste, $V'\cos.\alpha'$, $V'\cos.\beta'$, $V'\cos.\gamma'$ für die zweite sind. Ist U die resultierende Geschwindigkeit, deren Richtung mit den Axen die Winkel λ, μ, ν bildet; so läßt sich auch diese in drei Geschwindigkeiten nach Richtung der Axen zerlegen, deren Werthe $U.\cos.\lambda$, $U.\cos.\mu$, $U.\cos.\nu$ sind. Demnach ist

$$U\cos.\lambda = V\cos.\alpha + V'\cos.\alpha',$$
$$U\cos.\mu = V\cos.\beta + V'\cos.\beta',$$
$$U\cos.\nu = V\cos.\gamma + V'\cos.\gamma'.$$

Hieraus folgt, daß die Geschwindigkeit U ihrer Größe und Richtung nach durch die Diagonale des über den Geschwindigkeiten V und V' errichteten Parallelogramms dargestellt wird.

§. 139. Indem wir jetzt die allgemeinen Ausdrücke

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = \varpi(t)$$

wieder aufnehmen, wollen wir zunächst die allgemeinen Formeln für die Geschwindigkeit des materiellen Punkts am Ende der Zeit t und für die Richtung seiner Bewegung aufsuchen. Aus §. 109 folgt, daß

$$u = \frac{dx}{dt},\quad v = \frac{dy}{dt},\quad w = \frac{dz}{dt},$$

wenn wir durch u, v, w die Geschwindigkeit der Projectionen des materiellen Punkts auf den Axen der x, y und z am Ende der Zeit t bezeichnen; die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ haben wir aus jenen Hauptgleichungen herzuleiten. Die Geschwindigkeit des materiellen Punkts am Ende der Zeit t ist dann die resultierende Geschwindigkeit der

drei Geschwindigkeiten u, v, w und wird demnach dargestellt durch

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

wie im vorigen §. nachgewiesen ist. Die Richtung der Linie, welche der materielle Punkt beschreibt, bildet mit den Axen der x, y und z in dem Punkte, in dem sich derselbe am Ende der Zeit t befindet, Winkel, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

§. 140. Zweitens liegt uns die Aufgabe vor, die Größe und Richtung der Geschwindigkeit, welche dem materiellen Punkt in der Zeiteinheit am Ende der Zeit t ertheilt wird, d. h. die auf denselben wirkende Kraft zu bestimmen. Nach den in §. 109 und 110 entwickelten Principen muß man, um diese Aufgabe zu lösen, die Veränderung der Bewegung des Punktes in der unendlich kleinen Zeit dt untersuchen. Die in dem Augenblicke dt, der der Zeit t folgt, hinzugekommene Geschwindigkeit muß nun mit der bis dahin erlangten Geschwindigkeit $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ componiert die am Ende der Zeit $t + dt$ erlangte Geschwindigkeit ergeben. Da aber die Componierenden der während des

Zeitelements dt neu hinzugekommenen Geschwindigkeit nach Richtung der Axen der x, y und z nichts anders sind, als eben die während dieses Zeitelements eintretenden Zunahmen der Geschwindigkeiten u, v, w, also du, dv, dw; so folgt, daß $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ bezüglich die Componierenden nach Richtung jeder Axe für die Geschwindigkeit sind, welche der materielle Punkt in der Zeiteinheit am Ende der Zeit t erlangt. Der Werth dieser Geschwindigkeit wird also dargestellt durch

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2}$$

oder

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Die Zeit ist hierbei als unabhängige Veränderliche genommen. Die Richtung dieser Geschwindigkeit bildet mit den Axen der x, y und z Winkel, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}.$$

Bezeichnet man durch m die Masse des materiellen Punktes; so ist die Größe der Bewegung, welche dem Punkte in der Zeiteinheit ertheilt wird, am Ende der Zeit t

$$m\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2}$$

oder

$$m\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Wie §. 103 u. ff. nachgewiesen ist, stellen diese Formeln in Gewichtseinheiten den am Ende der Zeit t auf den materiellen Punkt durch die auf ihn wirkenden Kräfte ausgeübten Druck dar. Die Richtung dieses Drucks bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus durch die obigen Ausdrücke gegeben sind. Dieser Druck ist übrigens an Werth den drei andern gleich, welche nach Richtung der Axen der x, y und z wirkend bezüglich die Werthe haben

$$m\frac{du}{dt},\quad m\frac{dv}{dt},\quad m\frac{dw}{dt}\quad \text{oder}\quad m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dies sind demnach die allgemeinen Ausdrücke für die Componierenden des auf den materiellen Punkt geübten Drucks nach Richtung der drei Axen.

§. 141. Nach diesen allgemeinen Formeln lassen sich in bestimmten Fällen leicht die Gleichungen aufstellen, welche die Beziehungen zwischen den Werthen der Kräfte, die die Bewegung des materiellen Punktes bewirken und verändern, und den Functionen der Zeit ergeben, welche die in Folge dieser Bewegung durchlaufenen Räume darstellen. Wenn nämlich ein materieller Punkt von der Masse m der Einwirkung mehrerer Kräfte unterliegt; so können wir, indem wir jede dieser Kräfte in drei andere den Axen der x, y und z parallel wirkende zerlegen, durch Addition der nach Richtung jeder Axe wirkenden Componierenden alle Kräfte auf drei rechtwinklicht zu einander stehende Kräfte reducieren: da nun für jeden Augenblick diese drei Kräfte sich ergeben, ist die auf den materiellen Punkt geübte Einwirkung völlig

bestimmt. Ist X, Y und Z der resp. Werth des Druckes nach Richtung der x, y, z in Gewichtseinheiten, welchen die drei bezeichneten Kräfte am Ende der Zeit t auf den materiellen Punkt üben; so darf man gewöhnlich die Größen X, Y und Z als Functionen der Zeit und der die jedesmalige Lage des Punkts bestimmenden Coordinaten x, y und z ansehen. Aus dem vorigen §. folgt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Diese drei Gleichungen enthalten die Hauptbedingungen der Bewegung jenes Punkts.

Man kann diese Gleichungen auch so schreiben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m};$$

die Größen $\frac{X}{m}$, $\frac{Y}{m}$, $\frac{Z}{m}$ sind die Werthe der Geschwindigkeiten, welche die drei auf den materiellen Punkt wirkenden Kräfte ihm in der Zeiteinheit zu ertheilen im Stande sind. Wenn folglich diese Kräfte so gegeben sind, daß diese Geschwindigkeiten, welche sie in der Zeiteinheit dem materiellen Punkt zu ertheilen vermögen, bestimmt sind; so erhält man die allgemeinen Gleichungen der Bewegung, wenn man die Differentialquotienten $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ bezüglich den Geschwindigkeiten gleich setzt, welche die auf den materiellen Punkt wirkenden Kräfte demselben in der Zeiteinheit nach Richtung der x, y und z ertheilen.

Allgemeine Eigenschaften der Bewegung eines materiellen Punkts. Erhaltung der geradlinigen Bewegung.

§. 142. Die Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punkts ergeben mehrere Haupteigenschaften oder Grundgesetze derselben, deren Untersuchung sehr wichtig ist,

zumal wenn sie, wie dies in der Folge geschehen soll, auf die Bewegung eines Systems unter einander verbundener materieller Punkte, auf welche Kräfte wirken, ausgedehnt werden.

Wenn erstens auf den materiellen Punkt keine Kraft wirkt, so reducieren sich die oben entwickelten Gleichungen auf

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Die erste Integration derselben giebt

$$\frac{dx}{dy}=a,\quad \frac{dy}{dt}=b,\quad \frac{dz}{dt}=c,$$

wo a, b und c willkührliche Constanten bezeichnen. Wenn keine Kraft auf den materiellen Punkt wirkt; so sind seine drei Geschwindigkeiten nach Richtung jeder Axe, deren Werthe a, b und c darstellen, constant. Der materielle Punkt bewegt sich also geradlinig und gleichförmig.

Die zweite Integration giebt

$$x=A+at,\quad y=B+bt,\quad z=C+ct;$$

A, B und C sind drei neue willkührliche Constanten, welche offenbar die Coordinaten der der Zeit $t=0$ entsprechenden Lage des materiellen Punkts bezeichnen. Setzt man $a=0$, $b=0$, $c=0$, so reducieren sich die Werthe von x, y und z auf die drei Constanten A, B und C.

Diese Resultate sind für uns nicht neu; man beweist nur durch sie, daß in diesen allgemeinen Gleichungen, wie es der Fall sein muß, die in §. 102 mit den Namen Trägheit bezeichnete Eigenschaft der Körper enthalten ist.

Erhaltung der Rotationsbewegung. Princip der Flächen.

§. 143. Schreiben wir zweitens unsere Hauptgleichungen wieder so

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

so können wir daraus leicht folgende ableiten:

$$m\,\frac{y d^2x - x d^2y}{dt^2} = Xy - Yx,$$

$$m\,\frac{x d^2z - z d^2x}{dt^2} = Zx - Xz,$$

$$m\,\frac{z d^2y - y d^2z}{dt^2} = Yz - Zy.$$

Geben wir diesen Gleichungen folgende Form

$$m\,\frac{d(y dx - x dy)}{dt^2} = Xy - Yx,$$

$$m\,\frac{d(x dz - z dx)}{dt^2} = Zx - Xz,$$

$$m\,\frac{d(z dx - y dz)}{dt^2} = Yz - Zy;$$

so werden die rechten Seiten dieser Gleichungen in zwei Fällen zu 0: 1) wenn die Kräfte X, Y und $Z = 0$ sind, wie dies im vorigen §. angenommen war; 2) wenn die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft, deren Componierende nach Richtung der Axen X, Y und Z sind, beständig gegen den Anfangspunkt der Coordinaten gerichtet ist (wie dies der Fall sein würde, wenn diese Kraft aus einer von diesem Punkte ausgehenden Anziehung oder Abstoßung hervorgienge). In beiden Fällen reducieren sich jene Gleichungen auf

$$\frac{d(y dx - x dy)}{dt^2} = 0, \quad \frac{d(x dz - z dx)}{dt^2} = 0, \quad \frac{d(z dy - y dz)}{dt^2} = 0.$$

Durch die erste Integration erhält man

$$\frac{ydx-xdy}{dt}=n,\quad \frac{xdz-zdx}{dt}=m,\quad \frac{zdy-ydz}{dt}=l,$$

wo n, m und l willkührliche Constanten bezeichnen.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich unmittelbar, daß die durch den materiellen Punkt beschriebene Linie in einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgehenden Ebene liegt; denn wenn man sie resp. mit z, y und x multipliciert und dann addiert, so erhält man

$$0=lx+my+nz.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten des materiellen Punkts beständig Genüge leisten.

Wir wollen ferner die gerade Linie, welche in dieser Ebene den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Punkte verbindet, dessen Coordinate x, y und z sind, in welchem also der materielle Punkt am Ende der Zeit t liegt, durch r bezeichnen. Die Richtung dieser Linie, welche man Radius Vector nennt, ändert sich in jedem Augenblicke in Folge der Bewegung des materiellen Punkts. Außerdem wollen wir den unendlich kleinen Winkel, den die Lage des Radius Vector am Ende der Zeit t mit der am Ende der Zeit $t+dt$ statthabenden einschließt, $d\omega$ nennen. Am Ende der Zeit $t+dt$ ist die Länge des Radius Vector $r+dr$; wenn man nun durch ds den im Zeitelement dt durch den materiellen Punkt beschriebenen Bogen bezeichnet, so ist offenbar

$$r^2d\omega^2=ds^2-dr^2 \quad \text{oder} \quad d\omega^2=\frac{r^2ds^2-(xdx+ydy+zdz)^2}{r^4}.$$

Da nun die unendlich kleine Dreiecksfläche, welche in dem unendlich kleinen Zeitraume dt durch den Radius Vector beschrieben ist, $=\frac{1}{2}r^2d\omega$ ist; so läßt sich der Werth dieser Fläche auch so geben

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{r^2ds^2 - (xdx + ydy + zdz)^2}$$

oder durch den diesem Ausdruck gleichen

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(ydx - xdy)^2 + (xdz - zdx)^2 + (zdy - ydz)^2}.$$

Liegt der Radius Vector in der Ebene der xy, der xz oder der yz; so ist offenbar $\frac{1}{2}(ydz - xdy)$ oder $\frac{1}{2}(xdz - zdx)$ oder $\frac{1}{2}(zdy - ydz)$ der Ausdruck für den Werth der Fläche, welche der Radius Vector alsdann während der Zeit dt auf diesen Flächen beschreibt; man kann dies auch so darstellen: diese drei Ausdrücke geben die in der Zeit dt resp. auf den Ebenen der xy, xz und yz durch die Projectionen des Radius Vector auf denselben Ebenen beschriebenen Flächenstücke. So finden wir, wie es sein muß, daß die Fläche, welche der nach dem materiellen Punkt hingezogene Radius Vector im Raume beschreibt, gleich ist der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drei Projectionen dieses Flächenstücks auf den Coordinatenebenen.

Aber aus den oben gegebenen Gleichungen folgt, daß die Projectionen des unendlich kleinen Flächenstücks $\frac{1}{2}r^2d\omega$ auf den Coordinatenebenen zu dem Zeitelemente dt stets in constantem Verhältnisse stehen; diese Fläche selbst muß demnach auch zu dem Zeitelement dt, in welchem sie beschrieben wird, in constantem Verhältnisse stehen. Wenn folglich auf einen materiellen Punkt, der in Bewegung ist, keine oder nur eine von einem festen Mittelpunkte ausgehende beliebige Kraft wirkt; so bewegt sich dieser Punkt beständig in einer durch den festen Mittelpunkt hindurchgehenden Ebene und der vom festen Mittelpunkte nach dem beweglichen Punkte hingezogene Radius Vector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenstücke. Die Constanten n, m und l stellen das Doppelte der in jeder Zeiteinheit durch die Projectionen des Radius Vector auf den Ebenen der xy, xz und yz beschriebenen Flächenstücke dar, und die durch

den Radius Vector selbst in der Zeiteinheit beschriebene Fläche ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Ebene, in welcher sich der materielle Punkt bewegt, mit den Axen x, y und z einschließt, sind

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Wenn umgekehrt ein materieller Punkt in einer Ebene sich so bewegt, daß der von ihm nach einem festen Punkt dieser Ebene hingezogene Radius Vector gleiche Flächenstücke in jeder Zeiteinheit beschreibt; so wirkt die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft (wenn sie nicht $= 0$ ist) nothwendiger Weise nach Richtung des Radius Vector. Eine solche Kraft nennt man Centralkraft.

Erhaltung der lebendigen Kraft.

§. 144. Wenn man die Hauptgleichungen von §. 142

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

resp. mit dx, dy und dz multipliciert und dann addiert, so erhält man

$$m\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz;$$

oder, wenn man den im Zeitelement dt vom materiellen Punkt durchlaufenen Raum mit ds bezeichnet, so ist

$$m\frac{ds\,d^2s}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz.$$

Durch Integration erhält man

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=C+2\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

wo C eine willkührliche Constante darstellt.

Die wichtige in dieser Gleichung ausgesprochene Eigenschaft verdient unsere aufmerksame Beachtung. Wenn wir durch R die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft bezeichnen, deren Componierende nach Richtung der Axen X, Y und Z sind; durch r die Entfernung des materiellen Punktes von einem festen Punkte der Richtung dieser Kraft R am Ende der Zeit t; durch dr also den Raum, welchen der materielle Punkt längs dieser Richtung in derselben Zeit durchläuft, in der er nach Richtung der Axen die Wege dx, dy und dz zurücklegt: so hat man nach §. 29 stets $Rdr = Xdx + Ydy + Zdz$ und man kann die obige Gleichung darum auch so schreiben

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C + 2\int Rdr.$$

Der Werth der Constante C läßt sich aus dem Zustande des Körpers in einem gegebenen Augenblicke bestimmen. Bezeichnen wir also durch $\frac{ds_0}{dt}$ den Werth der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ in dem Augenblicke, in welchem r den Werth r_0 hat; so ist offenbar

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2\int_{r_0}^{r} Rdr.$$

Man nennt nun 1) **lebendige Kraft** eines in Bewegung begriffenen Körpers das Product seiner Masse in das Quadrat seiner jedesmaligen Geschwindigkeit.

2) Wenn eine Kraft auf einen Körper in Bewegung wirkt, nennt man **elementäre Größe der Einwirkung** das Product aus dem durch die Kraft ausgeübten Drucke R und den unendlich kleinen Raum dr, welchen der materielle Punkt im Sinne der Richtung der Kraft während des Zeitelements dt durchlaufen hat; **Größe**

der Einwirkung nennt man das Integral $\int_{r_0}^{r} R dr$, welches die Summe der elementären Größe der Einwirkung enthält, welche während der Zeit, daß der materielle Punkt den Raum $r - r_0$ auf der Richtung der Kraft durchlief, gebildet wurde.

Die Eigenschaft, welche die oben gegebene Gleichung ausdrückt, ist diese: Die Zunahme der lebendigen Kraft des materiellen Punktes in beliebiger Zeit ist stets numerisch gleich dem Doppelten der Größe der Einwirkung, welche in derselben Zeit durch die auf jenen Punkt wirkende Kraft hervorgebracht wird.

§. 145. Ist die Kraft constant, so erhält man einfach

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2R(r - r_0):$$

die Zunahme der lebendigen Kraft des materiellen Punktes in einer gegebenen Zeit ist gleich dem Doppelten des Products aus dem Druck R und dem Raume, den der materielle Punkt in derselben Zeit nach Richtung dieses Drucks durchlaufen hat.

Ist die Kraft R allein als Function der Entfernung r gegeben; so darf man die Größe Rdr stets als das Differential einer gewissen Function von r, Π ansehen, so daß $Rdr = d\Pi$ ist. Dann wird aus der obigen Gleichung

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2(\Pi - \Pi_0).$$

Π_0 ist der Werth der Function Π, der zu $r = r_0$ gehört. Der Werth der dem materiellen Punkt am Ende der Zeit t mitgetheilten lebendigen Kraft, folglich auch die Geschwindigkeit desselben hängen daher allein von der Beschaffenheit der Function Π und von dem Werth der Entfernung r am Ende der Zeit t ab; beide hängen durchaus nicht von der

Gestalt der Linie ab, welche der materielle Punkt während dieser Zeit durchlaufen hat. Wenn derselbe in seiner Bewegung sich abwechselnd dem auf der Richtung der Kraft angenommenen festen Punkte, von welchem aus die Entfernung r gerechnet wird, nähert und von ihm entfernt; so ergiebt sich stets derselbe Werth der Geschwindigkeit für den nämlichen Werth der Entfernung r. Wenn der materielle Punkt in seinen Ausgangspunkt zurückkommt; so gewinnt er dann, wenn seine Bewegung nach der Seite hin, nach welcher die Kraft wirkt, geschieht, die Geschwindigkeit wieder, welche er bei der Bewegung nach der der Richtung der Kraft entgegengesetzten Seite hin verliert. Hierin besteht die Erhaltung der lebendigen Kraft.

Wenn die Kraft R nicht allein als Function der Entfernung r gegeben ist, so kann $\int R dr$ nicht unmittelbar integriert werden; der Werth der Geschwindigkeit des materiellen Punktes ist nicht allein durch die Kenntniß der Entfernung r gegeben. Es gilt in diesem Falle freilich noch der am Ende des vorigen §. ausgesprochene Satz, aber es findet nicht mehr Erhaltung der lebendigen Kraft statt.

IX. Bewegung eines von beliebigen Kräften angegriffenen materiellen Punktes, der gezwungen ist sich auf einer gegebenen Linie oder Fläche zu bewegen.

---

§. 146. Im ersten Falle, daß der durch beliebige Kräfte angegriffene Punkt gezwungen ist sich auf einer gegebenen Linie zu bewegen, welche in fester Lage erhalten wird, handelt es sich darum 1) die Bewegung des materiellen Punkts; 2) den Druck zu bestimmen, der gegen jeden

Punkt der festen Linie, in welchem sich gerade der materielle Punkt befindet, ausgeübt wird.

Welche Kräfte auf den materiellen Punkt wirken mögen, man kann sie stets durch eine einzige Kraft R ersetzen, deren Componierende nach Richtung der x, y und z wir, wie in §. 141, durch X, Y und Z bezeichnen. In unserm Falle können wir die Kraft R jedesmal in zwei andere zerlegt denken, erstens nämlich in die Kraft P, welche nach Richtung der Tangente an der gegebenen Curve in dem Orte, in welchem sich gerade der materielle Punkt befindet, wirkt und zweitens in die senkrecht auf diese Tangente wirkende Kraft Q. Diese letztere Kraft wird augenscheinlich durch den Widerstand der Curve aufgehoben und übt auf die Bewegung des materiellen Punkts keinerlei Einwirkung, wogegen die Kraft P keine Einwirkung auf die Curve hat und dem materiellen Punkte seine Bewegung ertheilt. Bezeichnet man übrigens durch x, y, z die Coordinaten des Punkts, in welchem sich der materielle Punkt am Ende der Zeit t befindet, durch ds das Curvenelement, welches, wie nach Richtung der Axen die unendlich kleinen Räume dx, dy, dz, vom materiellen Punkt während der Zeit dt durchlaufen wird; so ist offenbar

$$P = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}.$$

Die Componierenden der Kraft Q nach Richtung der Axen x, y und z sind bezüglich

$$X - P\frac{dx}{ds}, \quad Y - P\frac{dy}{ds}, \quad Z - P\frac{dz}{ds}.$$

So lassen sich die Kräfte P und Q leicht bestimmen, wenn die Kräfte X, Y und Z gegeben sind.

Auch den von der Curve geleisteten Widerstand, dessen Richtung nothwendig senkrecht gegen diese Curve ist, kann man auf der andern Seite in zwei Kräfte zerlegt denken;

die eine derselben hebt die Kraft Q auf, ist ihr gleich und direct entgegengesetzt; die zweite ist eine unbekannte Kraft, von der wir nur wissen, daß ihre Richtung senkrecht auf der Curve steht: es handelt sich nun darum sie zu bestimmen. Wir wollen dieselbe durch N, die Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen der x, y und z bildet, durch l, m und n bezeichnen. Daß der Theil N des Widerstandes der Curve existiert, bewirkt die Trägheit des materiellen Punktes, welcher beständig aus der Curve, in der er festgehalten wird, herauszutreten und geradlinig seine Bewegung mit seiner jedesmaligen Geschwindigkeit fortzusetzen strebt. Da die Kraft Q und der ihr entgegengesetzte Theil des Widerstandes sich gegenseitig aufheben, so wird die Bewegung des materiellen Punkts allein durch die Kräfte P und N hervorgebracht oder modificiert. Es wird also die Kraft N offenbar dadurch bestimmbar, das der materielle Punkt unter Einwirkung der beiden Kräfte P und N, wenn man ihn völlig frei denkt, so daß nur jene beiden Kräfte auf ihn wirken, die nämliche Bewegung annehmen muß, welche er auf der gegebenen Curve wirklich hat.

Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes am Ende der Zeit t ist aber $= \frac{ds}{dt}$ und die Componierenden derselben nach Richtung der Axen der x, y und z sind bezüglich

$$\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds}, \quad \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds}, \quad \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

Folglich sind die Geschwindigkeiten, welche der materielle Punkt nach Richtung der Axen während des Zeitelements dt hinzugewinnt, da sie den Differentialen dieser Größen gleich sein müssen, resp.

$$\frac{d^2s}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{ds}{dt} \cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right), \quad \frac{d^2s}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{ds}{dt} \cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$
$$\frac{d^2s}{dt} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{ds}{dt} \cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Diese Differentiale ergeben durch dt dividiert die am Ende der Zeit t während der Zeiteinheit nach Richtung jeder der Axen hinzugewonnene Geschwindigkeit. Es sind demnach den im vorigen Capitel aufgestellten Grundgesetzen gemäß, wenn man durch m die Masse des materiellen Punktes, den wir unter alleiniger Einwirkung der Kräfte P und N als frei ansehen dürfen, bezeichnet, folgende die Gleichungen, welche die Natur seiner Bewegung ausdrücken:

$$m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{ds}{dt^2}\cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]=P\frac{dx}{ds}+N\cos.l,$$

$$m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{ds}{dt^2}\cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]=P\frac{dy}{ds}+N\cos.m,$$

$$m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dz}{ds}+\frac{ds}{dt^2}\cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]=P\frac{dz}{ds}+N\cos.n.$$

§. 147. Da die Richtung der Kraft N senkrecht auf der Curve steht, so findet nothwendigerweise die Beziehung statt, daß

$$\frac{dx}{ds}\cos.l+\frac{dy}{ds}\cos.m+\frac{dz}{ds}\cos.n=0.$$

Da ferner die Größen $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)$ resp. den Cosinus der Winkel proportional sind, welche der Halbmesser des Krümmungskreises der Curve mit den Axen bildet (vergl. I. §. 237 des Lehrb. der Differ. Rechn.); so ist gleichfalls

$$\frac{dx}{ds}\cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}\cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}\cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Wenn man also die obigen drei Gleichungen resp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multipliciert und sie dann addiert, so erhält man

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=P.$$

Wenn daher eine beständig nach Richtung der Curve wirkende Kraft P auf den materiellen Punkt wirkt; so bewegt

er sich längs dieser Curve ebenso, wie er sich längs einer geraden Linie bewegen würde, nach deren Richtung die Kraft P beständig wirkte.

Uebrigens kann man der Gleichung auch diese Form geben

$$m\frac{ds \cdot d^2s}{dt^2} = Pds, \quad \text{oder} \quad m\frac{ds \cdot d^2s}{dt^2} = Xdx + Ydy + Zdz,$$

folglich

$$m\frac{ds \cdot d^2s}{dt^2} = Rdr.$$

Wir haben in §. 144 durch dr den während des Zeitelements dt von dem materiellen Punkte nach Richtung der Kraft R (deren Componierende X, Y und Z sind) durchlaufenen Raum bezeichnet. Man schließt daraus, wie dort geschehen ist, daß

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2\int_{r_0}^{r} Rdr.$$

Es folgt daraus, daß die in §. 144 und 145 gegebenen Sätze gleichfalls für den Fall Gültigkeit haben, daß der materielle Punkt gezwungen ist sich auf einer beliebigen in fester Lage erhaltenen Curve zu bewegen. Wenn keine Kraft auf ihn wirkt, so behält er seine Geschwindigkeit ohne Veränderung. Ferner ist der Zuwachs der lebendigen Kraft in einer bestimmten Zeit stets gleich dem Doppelten der Größe der Einwirkung, welche während derselben Zeit die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft ihm ertheilt hat. Daraus ergiebt sich, daß die Größe der Einwirkung der den Widerstand der Curve darstellenden Kräfte stets $= 0$ ist, weil die in jedem Zeitelement nach Richtung dieser Kräfte durch den materiellen Punkt durchlaufenen Räume stets den Werth 0 haben.

§. 148. Aus der oben entwickelten Gleichung $m\frac{d^2s}{dt^2}=P$ ergeben sich folgende Reductionen der am Ende des §. 146 gegebenen Gleichungen

$$m.\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dx}{ds}\right)=N\cos.l,$$

$$m.\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dy}{ds}\right)=N\cos.m,$$

$$m.\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dz}{ds}\right)=N\cos.n.$$

Will man durch ϱ den Radius des Krümmungskreises bezeichnen, so können sie auch so geschrieben werden

$$m.\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right)=N\cos.l,$$

$$m.\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right)=N\cos.m,$$

$$m.\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right)=N\cos.n.$$

Erhebt man diese Gleichungen zum Quadrat und addiert sie, so erhält man

$$N=m\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2;$$

folglich

$$\cos.l=\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\quad \cos.m=\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

$$\cos.n=\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Vergleicht man hiermit die in I. §. 237 des Lehrb. der Diff. Rechn. für $\cos.\lambda$, $\cos.\mu$, $\cos.\nu$ gegebenen Ausdrücke, so sieht man, daß

$$\cos.l=\cos.\lambda,\quad \cos.m=\cos.\mu,\quad \cos.n=\cos.\nu.$$

Die Richtung der Kraft N fällt demnach beständig mit der des Halbmessers des Krümmungskreises der Curve, auf welcher sich der materielle Punkt bewegt, zusammen; ihre Einwirkung

ist so, daß sie diesen Punkt beständig dem Mittelpunkte des Krümmungskreises zu nähern strebt. Der Werth der Kraft N hängt allein von der Geschwindigkeit des materiellen Punktes und von der Größe des Krümmungshalbmessers in jedem Punkte der Curve ab.

Das Streben des materiellen Punktes die jedesmalige Richtung seiner Bewegung beizubehalten bringt demnach einen beständig nach Richtung des Krümmungshalbmessers dieser Curve wirkenden Druck hervor. Man hat denselben Centrifugalkraft genannt, weil der materielle Punkt fortwährend strebt sich vom Mittelpunkte des Krümmungskreises zu entfernen; diese Kraft wird durch den Widerstand der Curve aufgehoben. Der Werth des Druckes in Gewichtseinheiten ist $m.\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$; er ist im Stande dem materiellen Punkte in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ zu ertheilen, eine Geschwindigkeit also, welche in jedem Punkte der Curve dem Quadrate der Geschwindigkeit des materiellen Punkts, dividiert durch den Krümmungshalbmesser der Curve gleich ist.

Anmerkung über die Bewegung eines völlig freien materiellen Punktes.

§. 149. Die Centrifugalkraft existiert immer, wenn ein materieller Punkt aus irgend einer Ursache sich krummlinig bewegt. Wird der Punkt auf einer gegebenen Curve zu bleiben gezwungen, so wird sie durch den Widerstand der Curve aufgehoben; wenn der materielle Punkt sich völlig frei bewegen kann, so muß die Centrifugalkraft durch die auf denselben wirkenden Kräfte selbst aufgehoben werden. Bei völlig freier Bewegung eines materiellen Punktes müssen folglich die auf ihn wirkenden Kräfte stets derartig sein, daß sie durch zwei Kräfte allein ersetzt werden können,

von denen die eine nach Richtung der Tangente, die andere nach Richtung des Halbmessers des Krümmungskreises der beschriebenen Curve wirkt. Die erstere derselben bewirkt die Bewegung des materiellen Punkts nach Richtung dieser Curve, die zweite hebt die Centrifugalkraft auf.

Sind nun R' und R'' die Kräfte, in welche wir die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft R zerlegen, nämlich R' die nach Richtung der Tangente, R'' die nach Richtung des Halbmessers des Krümmungskreises der Curve wirkende; so nehmen die allgemeinen Gleichungen von §. 142 folgende Gestalt an

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R'\frac{dx}{ds} + R''\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = R'\frac{dy}{ds} + R''\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = R'\frac{dz}{ds} + R''\frac{\varrho}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

es handelt sich darum die Werthe von R' und R'' abzuleiten. Multipliciert man nun zuerst jede Gleichung mit dem Coefficienten von R' in derselben Gleichung und addiert; so wird der R'' enthaltende Ausdruck zu 0, weil die Richtung dieser Kraft mit der von R' einen rechten Winkel bildet. Dann ist einfach

$$m\frac{1}{dt^2}.\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds} = R' \quad \text{oder} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = R';$$

die Kraft R' ist demnach dieselbe, die wir in §. 146 mit P bezeichnet haben.

§. 150. Wenn man ferner jede Gleichung mit dem Coefficienten von R'' in derselben Gleichung multipliciert und alsdann addiert, so wird jetzt der Coefficient von $R' = 0$ und es ist

$$m\frac{1}{dt^2}\frac{\varrho}{ds}\left[d^2x.d\left(\frac{dx}{ds}\right) + d^2y.d\left(\frac{dy}{ds}\right) + d^2z.d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right] = R'',$$

oder

$$m\frac{1}{dt^2}\frac{\varrho}{ds^2}[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]=R'',$$

oder mit Berücksichtigung des in I. §. 237 des Lehrb. der Diff. Rechn. für ϱ gegebenen Ausdrucks

$$m\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=R''.$$

Die Kraft R'' ist daher der gleich, welche wir in §. 146 N genannt haben.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer gegebenen Fläche.

§. 151. Auch in diesem Falle, wo uns ein von beliebigen Kräften angegriffener Punkt vorliegt, welcher gezwungen ist sich auf einer gegebenen, in fester Lage erhaltenen Fläche zu bewegen, ist unsere Aufgabe die doppelte: 1) die vom materiellen Punkte auf der Fläche beschriebene Linie — seine Bahn — und die Bewegung des Punktes nach Richtung dieser Linie zu bestimmen; 2) den durch den materiellen Punkt gegen die Fläche geübten Druck, dessen Richtung nothwendig senkrecht auf dieser Fläche steht, zu bestimmen.

Wir wollen, wie in §. 146, die am Ende der Zeit t auf den materiellen Punkt wirkende Kraft mit R, die Componierenden dieser Kraft nach Richtung der Axen der x, y und z mit X, Y und Z bezeichnen. Die Gleichung der Fläche, auf der sich zu bewegen der Punkt gezwungen ist, hat im allgemeinen die Form

$$z=f(x, y)$$

und die Coordinaten der Bahnlinie müssen dieser Gleichung Genüge leisten. Durch N wollen wir den Widerstand der Fläche gegen den Druck, der auf sie wirkt, bezeichnen. Die Kraft R läßt sich nothwendig in zwei andere zerlegen, von

denen die eine senkrecht gegen die Fläche wirkt und darum aufgehoben wird; die andere liegt in der Berührungsebene und sie allein bringt die Bewegung des materiellen Punktes hervor. Die Kraft N muß 1) die erste dieser beiden Kräfte aufheben; 2) muß sie die Trägheit des materiellen Punktes überwinden, indem dieser ohne Aufhören strebt aus der Fläche herauszutreten, in welcher er zurückgehalten wird. Die Richtung der Kraft N muß natürlich auf der Fläche senkrecht stehen und man kann den Werth derselben darnach völlig bestimmen, daß der als völlig frei angenommene materielle Punkt unter Einwirkung der beiden Kräfte R und N dieselbe Bewegung erhalten müßte, welche er in Wirklichkeit auf der gegebenen Fläche hat.

Die allgemeinen Formeln für die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf der Fläche mit den Axen bildet (vergl. I. §. 217 des Lehrb. der Diff. Rechn.), geben die Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - N\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - N\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}};$$

diese bestimmen, wenn man die Gleichung der Fläche $z = f(x,y)$ hinzunimmt, die Bewegung des materiellen Punktes und den durch N bezeichneten Widerstand der Fläche. In diesen Gleichungen gehören die Coordinaten x, y und z dem Punkte der Fläche an, in dem sich der

materielle Punkt am Ende der Zeit t befindet; $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ sind die aus der Gleichung $z=f(x,y)$ abgeleiteten Werthe der Differentialquotienten der Function z für diesen Punkt.

§. 152. Wenn man sodann das unendlich kleine Stück der Bahn, welches der materielle Punkt in dem Zeitelement dt zurücklegt, durch ds, die Projectionen desselben auf den Axen resp. durch dx, dy, dz bezeichnet; so verschwindet, weil ds mit der Normale der Fläche einen rechten Winkel einschließt, wenn man die voranstehenden Gleichungen bezüglich mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ multipliciert und sie addiert, der Ausdruck, welcher N enthält und es bleibt

$$m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz,$$

oder, wie in §. 147

$$m\frac{dsd^2s}{dt^2}=Rdr,$$

woraus wieder folgt

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2=2\int_{r_0}^{r}Rdr.$$

So passen die Sätze, welche in §. 144 und 145 für die Bewegung eines freien materiellen Punktes gegeben sind, auch für die Bewegung eines materiellen Punktes, der gezwungen ist sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen. Die Zunahme der lebendigen Kraft in einer gegebenen Zeit ist stets gleich dem Doppelten der Größe der Einwirkung, welche die auf den materiellen Punkt wirkenden Kräfte ihm ertheilen. Wenn der materielle Punkt sich bewegt, ohne daß eine Kraft auf ihn wirkt; so behält er seine anfängliche Geschwindigkeit ohne Veränderung.

§. 153. Eliminieren wir N aus den drei Gleichungen des §. 151; so bleiben die beiden folgenden, welche die vom

materiellen Punkte beschriebene Linie bestimmen:

$$d^2x + \frac{dz}{dx} d^2z = \frac{ds^2\left(X + \frac{dz}{dx} Z\right)}{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2},$$

$$d^2y + \frac{dz}{dy} d^2z = \frac{ds^2\left(Y + \frac{dz}{dy} Z\right)}{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}.$$

In denselben kann man $m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ durch den oben entwickelten Ausdruck $m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 + 2\int_{r_0}^{r} R\,dr$ ersetzen. Wenn wir ferner den aus der Gleichung der Fläche abgeleiteten Werth von z hineinsetzen, so enthalten die beiden voranstehenden Gleichungen nur noch die beiden Veränderlichen x und y. Aus denselben läßt sich folglich die Projection der gesuchten Bahn auf der Ebene der xy bestimmen, wenn die anfängliche Geschwindigkeit des materiellen Punktes ihrer Größe und Richtung nach gegeben ist.

§. 154. Endlich um den mit N bezeichneten senkrechten Druck zu bestimmen, multipliciert man jede der drei Gleichungen des §. 151 mit dem jedesmaligen Coefficienten von N in derselben Gleichung und erhält durch Addition derselben

$$N = -\frac{-\frac{dz}{dx}X - \frac{dz}{dy}Y + Z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}} - m\frac{1}{dt^2}\frac{\frac{dz}{dx}d^2x + \frac{dz}{dy}d^2y - d^2z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

Der erstere Ausdruck stellt offenbar eine Kraft dar, welche der nach Richtung der Normalen der Fläche wirkenden Componierenden der Kraft R gleich und direct entgegengesetzt ist. Der zweite Ausdruck kann auch so geschrieben werden

$$-m\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{\varrho\left(\frac{dz}{dx}d^2x+\frac{dz}{dy}d^2y-d^2z\right)}{ds^2\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}.$$

Bezeichnet man durch Ψ den Winkel, welchen der Krümmungshalbmesser der Bahn mit der Normalen der Fläche in demselben Punkte bildet, so ist (vergl. in I. §. 237 des Lehrb. der Diff. Rechn. die Formeln für die Cosinus der durch den Halbmesser des Krümmungskreises mit den Axen gebildeten Winkel)

$$\cos.\Psi = \frac{\varrho}{ds} \cdot \frac{\frac{dz}{dx}d.\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dz}{dy}d.\left(\frac{dy}{ds}\right)-d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}};$$

oder wenn man die angezeigten Differentiationen ausführt und beachtet, daß $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, weil die Coordinaten x, y, z der Gleichung der Fläche Genüge leisten müssen:

$$\cos.\Psi = \frac{\varrho}{ds^2} \cdot \frac{\frac{dz}{dx}d^2x+\frac{dz}{dy}d^2y-d^2z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}.$$

Folglich kann der zweite Ausdruck in der voranstehenden Formel für N auch so geschrieben werden:

$$-m\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cos.\Psi.$$

Dieser Ausdruck stellt demnach eine Kraft dar, welche gleich und entgegengesetzt der durch die Bewegung des materiellen Punktes auf seiner Bahn hervorgerufenen Centrifugalkraft ist, die nach Richtung der Normale der Fläche zerlegt ist.

Der senkrechte Druck, den die Fläche zu ertragen hat, ist gleich der Summe zweier Kräfte, von denen die eine die auf der Fläche senkrechte Componierende der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft ist, die andere die gleichfalls auf der Fläche senkrecht stehende Componierende der Centrifugalkraft, welche dem materiellen Punkte ertheilt und die bekannt ist, wenn man die Gestalt der Bahn kennt.

§. 155. Zwei Fälle verdienen besondere Beachtung, nämlich wenn die Kraft R beständig längs der Normalen der Fläche wirkt, auf welcher der materielle Punkt sich bewegt oder wenn diese Kraft $= 0$ ist; im ersten Falle ist $dr = 0$, im zweiten $R = 0$. Die in §. 152. aufgestellte Gleichung reduciert sich also auf $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_0}{dt}$, woraus man schließt, daß der materielle Punkt seine Anfangsgeschwindigkeit ohne Veränderung beibehält. Darum ist $\frac{ds}{dt}$ constant oder $d^2s = 0$.

§. 156. Für diese beiden Fälle werden die in §. 153 gegebenen Gleichungen der Bahn

$$d^2x + \frac{dz}{dx} d^2z = 0, \quad d^2y + \frac{dz}{dy} d^2z = 0.$$

Die Krümmungsebene steht demnach hier senkrecht auf der Fläche. Denn setzen wir statt d^2x und d^2y in die Formel für cos. Ψ in §. 154 die aus diesen Gleichungen entwickelten Werthe hinein, so ist

$$\cos. \Psi = - \frac{\varrho}{ds^2} \cdot d^2z \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1};$$

und wenn $d^2s = 0$, so reduciert sich der Werth von ϱ auf

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}};$$

setzt man auch in diese Gleichung statt d^2x und d^2y die

durch die obigen Gleichungen gegebenen Werthe, so ist

$$\varrho = \frac{d s^2}{d^2 z \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

Daraus folgt, daß hier cos. $\Psi = -1$. Es fällt also die Richtung des Halbmessers des Krümmungskreises der Bahn beständig mit der der Normalen der Fläche zusammen.

§. 157. Offenbar ist also hier der gegen die Fläche geübte Druck N gleich der Summe der Kraft R und der Centrifugalkraft des materiellen Punktes, weil beide Kräfte gleichmäßig nach Richtung der Normale wirken; wenn die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft $= 0$ ist, so reduciert sich folglich dieser Druck auf die Centrifugalkraft.

Von der geometrischen Eigenschaft ausgehend, daß die Krümmungsebene der Bahn beständig auf der Fläche senkrecht stehen soll, erhalten wir diese Curve, wenn wir über die Fläche einen sehr schmalen Streifen faltenlos hinüberlegen. Wir erhalten die Curve auch dadurch, daß wir einen Faden zwischen zwei Punkten der Fläche spannen, wenn wir von dem aus der Reibung hervorgehenden Widerstande absehen. Dieselbe Eigenschaft kommt auch den auf der Oberfläche der Erde durch geradlinige Absteckung (Alignement) gezogenen Linien zu, welche man geodätische Curven nennt.

X. Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einer gegebenen Curve.

§. 158. Die Bewegung eines schweren materiellen Punktes ist für alle von ihm beschriebenen Linien stets der Bedingung unterworfen, welche die Gleichung ausdrückt

$$mv^2 - mv_0^2 = 2mg(z - z_0)$$

oder

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0);$$

z bezeichnet die Entfernung des materiellen Punktes von der Horizontalebene der xy am Ende der Zeit t, v die Geschwindigkeit des Punktes am Ende derselben Zeit; z_0 und v_0 sind die Anfangswerthe von z und v. Die Ordinate z wird von oben nach unten, nach Richtung der Schwerkraft, gezählt, g ist der von freifallenden Körpern in der Zeiteinheit durchlaufene Raum. Diese Gleichung folgt unmittelbar aus dem in §. 147 aufgestellten Principe, daß nämlich die vom materiellen Punkte in gegebener Zeit gewonnene lebendige Kraft stets dem Doppelten der Größe der Einwirkung der in derselben Zeit auf den Punkt wirkenden Kräfte numerisch gleich ist.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ ist, so hat man einfach

$$v^2 = 2g(z - z_0).$$

Die dem materiellen Punkte ertheilte Geschwindigkeit hängt also keineswegs von der Gestalt der Curve ab, sondern allein von dem Unterschiede der Höhen des Ausgangspunktes und des Punktes, welchen der materielle Punkt in gewisser Zeit erreicht hat. Sie hängt stets ebenso, als wäre der Punkt vertikal gefallen, von diesem Höhenunterschiede ab (vergl. §. 115).

§. 159. Wenn ein schwerer materieller Punkt eine Curve durchläuft, welche nach vertikaler Richtung Krümmungen hat; so wechselt die Geschwindigkeit beständig. Dieselbe hat ihre Maxima und Minima in den Punkten der Curve, in denen die vertikale Ordinate z selbst ein Maximum oder ein Minimum ist, da also, wo die Tangente der Curve horizontal ist und wo der materielle Punkt sich im Gleichgewichte halten könnte.

Die Geschwindigkeit ist gleich 0, wenn der materielle Punkt sich wieder bis zu der Horizontalebene erhoben hat, von der er mit einer Geschwindigkeit $= 0$ herabgefallen war: folglich kann ein materieller Punkt durch die Wirkung der im Herabfallen erlangten Geschwindigkeit immer bis zu der Höhe des Punktes, von dem aus er gefallen war, wieder hinaufsteigen.

§. 160. Da die Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einer gegebenen Curve allein von dem Höhenunterschiede der einzelnen Theile derselben abhängt; so kann man die vertikale Cylinderfläche, welche durch die gegebene Curve hindurchgelegt werden kann, auf eine andere vertikale Cylinderfläche von beliebiger Basis abgewickelt denken; auf der neuen so erhaltenen Curve hat dann der schwere materielle Punkt dieselbe Bewegung, wie auf der gegebenen.

§. 161. Der gegen die Curve ausgeübte Druck ist im allgemeinen ein von Punkt zu Punkt verschiedener. Nach §. 148 resultiert er stets 1) aus der Componierenden des Gewichts mg des Körpers, welche senkrecht gegen die Curve in der Vertikalebene enthalten ist, welche sie in dem Punkte berührt, wo der materielle Punkt sich befindet; 2) aus der Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{\varrho}$ oder $m\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, die gleichfalls senkrecht gegen die Curve wirkt, aber in der Krümmungsebene und die den materiellen Punkt vom Mittelpunkt des Krümmungskreises zu entfernen strebt.

Wenn die Curve in einer vertikalen Ebene liegt, so fallen diese beiden Ebenen mit der Ebene der Curve zusammen und der Druck, den diese erleidet, ist gleich der Summe der Centrifugalkraft und der Componierenden des Gewichts des materiellen Punkts, deren Richtung auf der Curve senkrecht steht.

§. 162. Das Verhältniß zwischen den auf der Curve durchlaufenen Räumen und der Zeit ergiebt sich aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit des materiellen Punktes. Aus der Gleichung in §. 158 folgt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_0{}^2 + 2g(z - z_0) \quad \text{oder} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0{}^2 + 2g(z - z_0)}}.$$

Diese Gleichung giebt t als Function von z oder von s.

§. 163. Der einfachste Fall ist der, daß der materielle Punkt sich auf einer geneigten geraden Linie bewegt. Bildet diese Linie mit der Vertikalen den Winkel α, so ist $\frac{dx}{ds} = \sin.\alpha$, $\frac{dz}{ds} = \cos.\alpha$. Der Druck des materiellen Punkts gegen die Linie ist einfach

$$m g . \sin.\alpha.$$

Der im vorigen §. gegebene Ausdruck für dt nimmt folgende Gestalt an:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0{}^2 + 2g\cos.\alpha(s - s_0)}}.$$

Integriert man und bestimmt die Constante so, daß für $t = 0$, $s = s_0$ ist, so erhält man

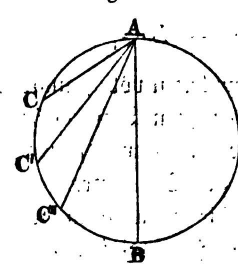
$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0{}^2 + 2g\cos.\alpha(s - s_0)}}{g\cos.\alpha}.$$

Das Resultat ist dasselbe, als wenn ein Körper unter Einwirkung einer constanten beschleunigenden Kraft, die ihm in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $g\cos.\alpha$ ertheilt, fiele; $g\cos.\alpha$ ist die Componierende der Geschwindigkeit g nach der Richtung der geneigten Linie.

§. 164. Fällt der Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit von dem obern Ende der geneigten Linie herab, so ist einfach $t = \sqrt{\frac{2s}{g\cos.\alpha}}$. Wenn man also mehrere verschiedenartig geneigte gerade Linien hat, AC, AC' rc., deren

Länge wir so bestimmen sollen, daß ein vom Punkte A aus fallender Körper bei allen dieselbe Zeit braucht um den Endpunkt zu erreichen; so muß die Länge jeder einzelnen so gewählt werden, daß das Verhältniß $\frac{s}{g \cos. \alpha}$ constant ist. (Fig. 18.)

Fig. 18.



Man schließt daraus, daß die Endpunkte dieser Linien im Umfange eines durch den Punkt A hindurchgehenden Kreises liegen müssen.

§. 165. Wenn man Versuche über die Fallbewegung längs einer Curve herab anstellt, so verändert manches, was der Bewegung hemmend entgegentritt, die Natur derselben. Man kommt jedoch im allgemeinen der Wahrheit am nächsten, wo es sich um einen festen Körper handelt, wenn man den Widerstand als aus der Reibung allein hervorgehend annimmt, deren Intensität dem gegen die Curve geübten Druck proportional ist. Die Gleichung der Bewegung eines schweren Körpers, der auf einer in einer vertikalen Ebene enthaltenen Curve herabgleitet, ist hiernach folgende:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg \frac{dz}{ds} - f \left[mg \cdot \frac{dx}{ds} + m \frac{1}{\varrho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right];$$

f bezeichnet das Verhältniß der Reibung zum Druck.

In den Fällen, wo es nothwendig erscheint, den Widerstand als abhängig von der Geschwindigkeit des materiellen Punktes einzuführen, muß man zur rechten Seite dieser Gleichung einen Ausdruck von der Form

$$- \left[B \left(\frac{ds}{dt} \right) + C \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right]$$

hinzusetzen, worin B und C constante Coefficienten bezeichnen.

Aus der Integration dieser Gleichung ergiebt sich das Gesetz der Bewegung.

§. 166. Bewegt sich, wie in §. 163, der materielle Punkt auf einer geraden Linie, die mit der Vertikalebene den Winkel α bildet; so erhält diese letzte Gleichung, wenn man durch v die Geschwindigkeit des Punktes am Ende der Zeit t bezeichnet, folgende Form:

$$m\frac{dv}{dt} = mg(\cos.\alpha - f\sin.\alpha) - (Bv + Cv^2).$$

Diese Gleichung ist der in §. 163 entwickelten völlig analog. Der materielle Punkt hat auf der geneigten Linie dieselbe Bewegung, die er auf der Vertikallinie haben würde, wenn hier die auf ihn wirkende Kraft sich zur Schwerkraft verhielte, wie $\cos.\alpha - f\sin.\alpha$ zu 1. Die Bewegung wird gleichförmig, wenn der Werth der Geschwindigkeit v der Gleichung

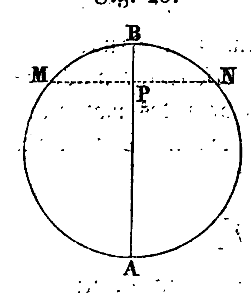
$$mg(\cos.\alpha - f\sin.\alpha) = Bv + Cv^2$$

Genüge leistet.

Bewegung eines schweren, materiellen Punktes im Kreise. Kreispendel.

§. 167. (Fig. 19.) Es sei ein schwerer, materieller Punkt gezwungen, sich in dem Kreise $BMAN$ zu bewegen, dessen vertikaler Durchmesser AB ist. Wenn seine anfängliche Lage M ist, und v_0 seine anfängliche Geschwindigkeit; so wird er unter Einwirkung der Schwere längs des Bogens MA herabfallen, im Punkte A angelangt seine größte Geschwindigkeit erhalten und von da aus mit abnehmender Geschwindigkeit

Fig. 19.



den Bogen AN hinansteigen, bis er in N, in gleicher Höhe mit seinem Ausgangspunkte M angekommen, dieselbe Geschwindigkeit wieder erhält, welche er in jenem Punkte hatte. Uebersteigt v_0 die zur Höhe BP gehörige Geschwindigkeit, so steigt der Punkt weiter von N nach B und über diesen Punkt hinausgehend fällt er wieder längs des Bogens BMA hinab. Er durchläuft also in einem fort nach derselben Richtung den Kreisumfang mit einer Geschwindigkeit, deren Maxima und Minima resp. in den Punkten A und B eintreten.

Ist aber $v_0 = 0$ oder auch nur kleiner, als die zur Höhe BP gehörige Geschwindigkeit, dann kann der materielle Punkt nicht bis B steigen. Er fällt dann von dem Punkte aus, in welchem seine Geschwindigkeit $= 0$ geworden ist, an dem Bogen BNA zurück und steigt sodann an dem Bogen AMB wieder bis zu der nämlichen Höhe hinauf. Es ist also die Bewegung des materiellen Punktes im Kreise eine oscillierende, d. h. er durchläuft abwechsend nach entgegengesetzter Richtung einen Theil des Kreisumfanges, welchen der vertikale Durchmesser AB in zwei symmetrische Bögen theilt. An den beiden obern Endpunkten dieses Bogens ist seine Geschwindigkeit $= 0$, im tiefsten Punkte hat er die größte Geschwindigkeit; er braucht gleiche Zeit den einen Bogen hinab-, wie den andern hinaufzusteigen.

§. 168. Wenn wir die Punkte des Kreisumfangs auf die beiden Axen, die horizontale Ax und die vertikale Az beziehen, welche durch den tiefsten Punkt A hindurchgelegt sind, wobei die z von unten nach oben gezählt werden; so sei M die anfängliche Lage des materiellen Punkts und z_0 die Ordinate des Punkts M; am Ende der Zeit t sei der materielle Punkt im Punkte m angelangt, dessen Coordinaten x und z sind und der durchlaufene Bogen Am werde durch s bezeichnet: soll dann auf diesen Fall die in §. 162 gegebene

Formel angewandt werden; so muß man den Differentialen dt und ds verschiedene Vorzeichen geben und das Vorzeichen von g ändern, weil die Schwerkraft so wirkt, daß sie die z vermindert. Dann ist also

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)}};$$

oder weil

$$ds = dz \frac{r}{\sqrt{2rz - z^2}},$$

so ist

$$dt = -\frac{rdz}{\sqrt{(2rz - z^2)[v_0^2 + 2g(z_0 - z)]}}.$$

Folglich stellt das Integral

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{-rdz}{\sqrt{(2rz - z^2)[v_0^2 + 2g(z_0 - z)]}}$$

die Zeit dar, welche der materielle Punkt gebraucht um den Bogen Mm zu durchlaufen, dessen Endpunkte die Ordinaten z_0 und z haben.

§. 169. Die Zeit T, welche der materielle Punkt gebraucht um von M aus ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgehend bis zum tiefsten Punkt A niederzusteigen, wird also durch den Ausdruck gegeben

$$T = \int_{z_0}^{0} \frac{-rdz}{\sqrt{(2rz - z^2) \cdot 2g(z_0 - z)}},$$

welcher auch so geschrieben werden kann

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{0}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(z_0 z - z^2)\left(1 - \frac{z}{2r}\right)}};$$

oder wenn man Factor $\left(1 - \frac{z}{2r}\right)^{\frac{1}{2}}$ in einer Reihe entwickelt

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2r} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{z}{2r}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2r}\right)^3 \ldots\right\}$$

Da ferner

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \text{arc. sin.}\frac{2z - z_0}{z_0},$$

so ist

$$\int_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \pi;$$

π bezeichnet, wie gewöhnlich, das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser.

Die Intregale der andern Ausdrücke, welche die unendliche Reihe bildend alle von solcher Form sind

$$\int_0^{z_0}\frac{z^n dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}},$$

hängen sämmtlich von einander ab, so daß man jedesmal den folgenden vermittels des vorhergehenden ausdrücken kann (vergl. I. §. 287 des Lehrb. der Diff. Rechn.). Man kann dies auch leicht unmittelbar beweisen. Da nämlich

$$d(z^n\sqrt{z_0 z - z^2}) = (n + \tfrac{1}{2})z_0\frac{z^n dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}} - (n+1)\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}};$$

weil ferner, wenn man von $z = z_0$ bis $z = 0$ integriert, das Integral des ersten Gliedes $= 0$ ist zwischen diesen Grenzen: so ist

$$\int_0^{z_0}\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \frac{(2n+1)z_0}{2(n+1)}\int_0\frac{z^n dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $n = 0$, $n = 1$, $n = 2 \ldots$, so findet man alle Glieder der obigen Reihe, wenn man vom zweiten ausgeht, so daß also

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{z_0}{2r}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{z_0}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{z_0}{2r}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Der materielle Punkt gebraucht um sich von A aus nach N zu derselben Höhe, die er im Ausgangspunkte hatte, zu erheben offenbar dieselbe Zeit, die er gebrauchte um vom M nach A herabzusteigen. Die Dauer einer Schwingung, d. h. die Zeit, welche der materielle Punkt gebraucht um den Bogen MAN zu durchlaufen, ist das Doppelte dieses Werthes von T.

§. 170. Wenn wir den Winkel, den der Halbmesser CM, welcher nach dem Ausgangspunkte des materiellen Punkts hin gezogen ist, mit dem vertikalen Durchmesser AB einschließt, Ω neunen; so ist

$$\frac{z_0}{2r} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos.\Omega) \text{ oder } \frac{z_0}{2r} = \tfrac{1}{2}.\frac{\Omega^2}{2} - \ldots$$

Ist nun der Bogen Ω sehr klein; so reduciert sich der Ausdruck für die Dauer einer Schwingung, sobald man nur die beiden ersten Glieder der Reihe berücksichtigt, auf

$$2T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{\Omega^2}{16}\right);$$

da man auch das Quadrat der sehr kleinen Größe Ω vernachlässigen kann, so ist

$$2T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Folglich ist die Dauer kleiner Kreisschwingungen eines materiellen Punkts unabhängig von der Weite dieser Schwingungen: wegen dieser Eigenschaft nennt man die Oscillationen isochron. Eine Schwingung dauert die nämliche Zeit, welche ein schwerer Körper gebraucht von einer Höhe gleich der mit π^2 multiplicierten Hälfte des Radius herabzufallen. Indem jede Curve innerhalb einer sehr kleinen Ausdehnung als zusammenfallend mit ihrem Krümmungskreise angesehen werden darf; bestimmt jene Formel

auch die Dauer der Schwingungen eines materiellen Punkts auf einer beliebigen in einer Vertikalebene gelegenen Curve in sehr kleiner Ausdehnung nach beiden Seiten hin von dem Punkte aus, in welchem die Tangente horizontal ist; natürlich muß dann unter r der Halbmesser des Krümmungskreises in diesem Punkte verstanden werden.

§. 171. Die beiden vorangehenden §§. enthalten das Gesetz der Schwingungen des sogenannten einfachen Pendels; dies ist nämlich ein schwerer materieller Punkt, der mittels eines unausdehnsamen und gewichtlosen Fadens an einem festen Punkte befestigt ist. Wenn man den Punkt aus der Vertikallinie herauszieht, welche durch seinen Aufhängungspunkt hindurchgeht und ihn alsdann ohne Anfangsgeschwindigkeit der Einwirkung der Schwerkraft überläßt; so macht er nach beiden Seiten dieser Vertikallinie hin Kreisschwingungen, deren Dauer durch den Ausdruck für $2T$ gegeben ist, wenn man von der Wirkung des Luftwiderstandes absieht.

Die Leichtigkeit, die in bestimmter Zeit gemachten Schwingungen eines Pendels zu zählen und dadurch die Dauer jeder derselben zu bestimmen, giebt uns den einfachsten Weg an, wie es möglich ist den Werth der durch g bezeichneten Größe aufs genaueste zu berechnen, d. h. der Geschwindigkeit, welche die Schwerkraft den fallenden Körpern in der Zeiteinheit ertheilt oder des Doppelten des Raumes, welchen der Körper unter alleiniger Einwirkung dieser Kraft in der ersten Zeiteinheit seines Falles durchläuft. Jedoch braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß es unmöglich ist ein einfaches Pendel herzurichten, d. h. einen Körper, dessen Masse am Ende des Fadens, an welchem er hängt, concentriert ist. Man muß das Volumen und die Gestalt des schwingenden Körpers berücksichtigen; dies macht eine anderweitige Untersuchung unumgänglich, welche ein anderes

Princip erfordert, das uns in der Folge beschäftigen wird. Natürlich muß man auch auf die Verminderung des Gewichts der Körper in der Luft, auf Einwirkung des Luftwiderstandes auf die Bewegung des schwingenden Körpers, auf den Einfluß der Art der Befestigung und auf einige andere Umstände Rücksicht nehmen.

§. 172. Der Faden, an welchem das einfache Pendel hängt, muß offenbar stets gespannt sein. Die Spannung dieses Fadens ist nichts anderes, als der Druck, den der materielle Punkt gegen die Curve ausübt, die er zu beschreiben hat; der Werth dieses Drucks ist §. 161 nachgewiesen. Wenn der materielle Punkt in m ist (Fig. 19),

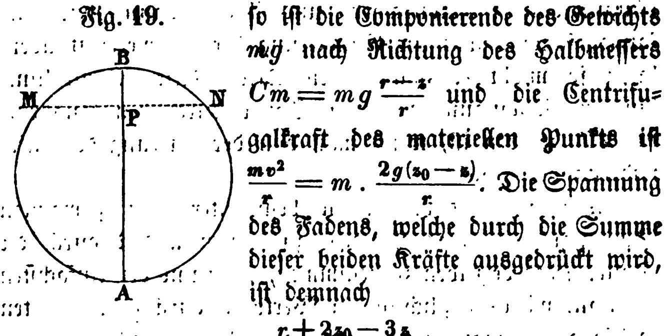


Fig. 19.

so ist die Componierende des Gewichts mg nach Richtung des Halbmessers $Cm = mg\frac{r-z}{r}$ und die Centrifugalkraft des materiellen Punkts ist $\frac{mv^2}{r} = m \cdot \frac{2g(z_0 - z)}{r}$. Die Spannung des Fadens, welche durch die Summe dieser beiden Kräfte ausgedrückt wird, ist demnach

$$mg \cdot \frac{r + 2z_0 - 3z}{r}.$$

Bewegung eines schweren materiellen Punkts auf der Cykloide. Cykloidenpendel.

§. 173. (Fig. 20.) DAD' sei eine Cykloide, deren Axe DD' horizontal ist; A der tiefste Punkt der Curve und AB der Durchmesser des erzeugenden Kreises, den wir mit a bezeichnen wollen: wenn wir nun, wie oben, z_0 und z die vertikale Höhe über dem Punkte A resp. der anfänglichen Lage des schweren materiellen Punktes in M

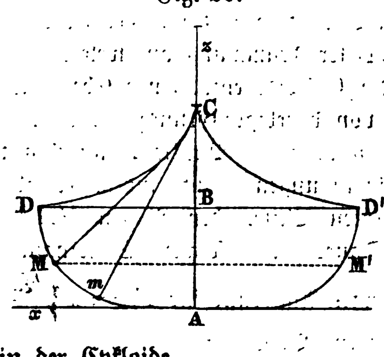


Fig. 20.

und der Lage in m, in der sich der Punkt am Ende der Zeit t befindet, nennen; so ist, wie in §. 168,

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)}},$$

wenn wir den Bogen Am durch s bezeichnen. Da nach I. §. 191 des Lehrb. der Diff. Rechn. in der Cykloide

$$s = 2\sqrt{az} \quad \text{und} \quad ds = dz\sqrt{\frac{a}{z}};$$

so erhält man, wenn man diesen Werth hineinsetzt und zugleich die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ annimmt, statt der vorigen die neue Gleichung

$$dt = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}}.$$

Die Integration ergiebt (vergl. §. 169)

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}\,\text{arc.}\cos.\frac{2z - z_0}{z_0},$$

als Ausdruck für die Zeit, welche der materielle Punkt gebraucht um von M bis m zu fallen.

Der Ausdruck für die Zeit T, welche der materielle Punkt gebraucht, um von M nach A zu gelangen, ist also

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Die Zeit, welche ein materieller Punkt gebraucht um auf einem Cykloidenbogen bis zum tiefsten Punkt herabzusteigen, ist demnach unabhängig von der Länge dieses Bogens: diese

Eigenschaft, welche den Curven, denen sie zukommt, den Namen Tautochronen verleiht, gehört nur der Cykloide und den Curven von doppelter Krümmung an, welche man bildet, wenn man die die Cykloide enthaltende Ebene um einen vertikalen Cylinder von beliebiger Grundfläche herumlegt. Weil der Körper, welcher im Punkte A angelangt weiter bis M' steigt, Schwingungen macht, indem er abwechselnd nach entgegengesetzten Seiten den Bogen MAM' durchläuft; so ist die Dauer einer solchen Schwingung gleich dem Doppelten des letzten Ausdrucks für T, $= \pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, wie groß auch der beschriebene Bogen ist.

§. 174. Der Ausdruck $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ unterscheidet sich nicht von dem ersten Gliede der in §. 169 gegebenen Reihe, wenn man statt r in demselben $2a$ schreibt. Demnach ist die Dauer einer Schwingung auf der Cykloide, welches auch die Größe des durchlaufenen Bogens sein mag, der Dauer einer sehr kleinen Schwingung eines Kreispendels gleich, dessen Länge das Doppelte des Durchmessers des die Cykloide erzeugenden Kreises ist. Man hat versucht solche Cykloidenpendel herzustellen. Legt man nämlich in CD und CD' zwei halbe Cykloiden zusammen, welche mit dem nämlichen erzeugenden Kreise beschrieben sind, wie die gegebene Cykloide DAD'; so sind die Theile AD und AD' die Evoluten der Bogen CD und CD'. Denkt man sich also den materiellen Punkt am Ende eines völlig biegsamen in C befestigten Fadens angeheftet, dessen Länge $= CA$ oder $2a$ ist; so evolviert er von einer Seite der Vertikallinie AC zur andern schwingend, die Theile der Curven CD und CD' und der Punkt beschreibt Bögen der Cykloide DAD'. Die Dauer einer Schwingung dieses cykloidischen Pendels ist, welches auch ihre Weite sein mag,

der Dauer einer sehr kleinen Schwingung des Kreispendels gleich, dessen Länge $= AC$ ist.

XI. Bewegung geworfener Körper im leeren Raume und in einem widerstrebenden Medium.

§. 175. Da die Bahn eines mit gegebener Geschwindigkeit nach beliebiger Richtung geworfenen Körpers, auf welchen zugleich nach unten die Schwerkraft wirkt, in der durch die anfängliche Richtung seiner Geschwindigkeit hindurchgehenden Vertikalebene liegen muß; so genügt es die Bewegung des materiellen Punkts auf eine einzige in dieser Ebene liegende, horizontale Coordinate x und auf eine vertikale z zu beziehen; letztere möge von unten nach oben gezählt werden. Wird die Geschwindigkeit, welche die Schwerkraft den schweren Körpern in der Zeiteinheit ertheilt, g genannt; so sind die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Es folgt daraus unmittelbar

$$\frac{dx}{dt} = V\cos.\theta, \quad \frac{dz}{dt} = V\sin.\theta - gt.$$

V ist die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes, θ der durch die Richtung der V mit der Horizontalaxe der x gebildete Winkel.

Die zweite Integration giebt

$$x = t.V.\cos.\theta, \quad z = t.V.\sin.\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eine Constante braucht man nicht hinzuzufügen, weil man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Anfangslage des Punktes hineinlegen kann.

Der Ausdruck für die Geschwindigkeit nach der Zeit t ist

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{V^2-2V\sin.\theta.gt+g^2t^2}=\sqrt{V^2-2gz}.$$

§. 176. Man findet als Gleichung der Wurfbahn

$$z = x\,\text{tang.}\,\theta - x^2\frac{g}{2V^2\cos.\theta^2}.$$

Die Curve ist folglich eine Parabel; die Coordinaten ihres Scheitelpunkts sind

$$x = \frac{V^2.\sin.2\theta}{2g} \text{ und } z = \frac{V^2.\sin.\theta^2}{2g}.$$

Die durch den Scheitelpunkt hindurchgehende Vertikallinie theilt die Curve in zwei gleiche Theile.

Folgende Gleichungen bestimmen die anfängliche Geschwindigkeit und Richtung, welche die Wurflinie durch einen bestimmten Punkt hindurchführen:

$$V=\sqrt{\frac{gx^2}{x\sin.2\theta-2z\cos.\theta^2}},\quad \text{tang.}\theta=\frac{V^2\pm\sqrt{V^4-g^2x^2-2V^2gz}}{gx};$$

oder, wenn $z=0$ ist,

$$V=\sqrt{\frac{gx}{\sin.2\theta}},\quad \sin.2\theta=\frac{gx}{V^2}.$$

Einer gegebenen Weite entsprechen immer zwei Anfangsrichtungen. Die größtmögliche Weite, das Maximum des Werths von $x=\frac{V^2\sin.2\theta}{g}$ gehört dem Werth von $\theta=\frac{\pi}{4}$ zu.

§. 177. Wenn man, wie dies im vorigen §. geschah, den Luftwiderstand ganz unberücksichtigt läßt; so stimmen die erzielten Resultate natürlich nicht mit den Resultaten wirklich angestellter Versuche überein. Für große Geschwindigkeiten, welche wir meist bei Aufgaben dieser Art in Betracht zu ziehen haben, wächst der Widerstand, wie aus Versuchen hervorgeht, in schnellerer Progression, als nach Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit; zugleich ist

die Dichtigkeit der Luft in verschiedenen Punkten der Wurflinie verschieden und damit verändert sich auch die Intensität des Luftwiderstandes. Eine genaue Berücksichtigung aller dieser Umstände würde sehr complicierte Berechnungen veranlassen. Wenn wir deshalb die Dichtigkeit der Luft einfach als constant, ihren Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional annehmen; so sind die Gleichungen der Bewegung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dx}{ds}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dz}{dt} - mg.$$

s ist die Länge des den Coordinaten x und z zugehörenden Bogens der Wurflinie.

K ist ein constanter Coefficient, der von der Figur des Körpers und von der Dichtigkeit des Fluidums abhängt.

Diese Gleichungen können auch so geschrieben werden:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt},$$

$$(2) \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{K}{m} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} - g.$$

Aus denselben soll die Gestalt der Wurflinie und der Ausdruck für die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers in einem gegebenen Punkte jener Curve bestimmt werden.

Die Gleichung (1) giebt sogleich

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = V\cos.\theta\, e^{-\frac{K}{m}s}.$$

§. 178. Schreibt man zur Abkürzung $\frac{dz}{dx} = q$ oder $dz = q.dx$, so ist $\frac{dz}{dt} = q.\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + q\frac{d^2x}{dt^2}$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (2), so verwandelt sie sich in

$$(4) \quad \frac{dq}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g.$$

oder nach Gleichung (3)

$$(5) \quad \frac{dq}{dx} = -\frac{g}{V^2 \cos.\theta^2} \cdot e^{\frac{2K}{m}.s},$$

oder

$$dq\sqrt{1+q^2} = -\frac{g}{V^2 \cos.\theta^2} \cdot ds . e^{\frac{2K}{m}.s};$$

die Integration giebt

$$q.\sqrt{1+q^2} + l.(q+\sqrt{1+q^2}) = \text{Const.} - \frac{mg}{KV^2\cos.\theta^2} \cdot e^{\frac{2K}{m}.s};$$

oder bestimmt man die Constante so, daß man $q = \text{tang.}\,\theta$ setzt, wenn $s = 0$ ist,

$$(6) \quad \text{tang.}\,\theta\sqrt{1+\text{tang.}\,\theta^2} - q\sqrt{1+q^2}$$
$$+ l\frac{\text{tang.}\,\theta + \sqrt{1+\text{tang.}\,\theta^2}}{q+\sqrt{1+q^2}} = \frac{mg}{KV^2\cos.\theta^2}\left(e^{\frac{2K}{m}.s} - 1\right).$$

§. 179. Da die Gleichung (6) ein Verhältniß zwischen q und s ergiebt, so läßt sich daraus die Gestalt der Curve erkennen. Eliminiert man nämlich aus dieser und der Gleichung (5) die Größe $e^{\frac{2K}{m}.s}$ und bezeichnet durch Q die Größe

$$\frac{mg}{KV^2\cos.\theta^2} + \text{tang.}\,\theta\sqrt{1+\text{tang.}\,\theta^2} - q\sqrt{1+q^2}$$
$$+ l\frac{\text{tang.}\,\theta + \sqrt{1+\text{tang.}\,\theta^2}}{q+\sqrt{1+q^2}},$$

so erhält man dadurch

$$dx = -\frac{m}{K}\frac{dq}{Q},$$

$$dz = -\frac{m}{K}\frac{q\,dq}{Q}.$$

Folglich ist

$$x = \frac{m}{K}\int_q^{\text{tang.}\,\theta}\frac{dq}{Q}, \qquad z = \frac{m}{K}\int_q^{\text{tang.}\,\theta}\frac{q\,dq}{Q}.$$

Diese bestimmten Integrale lassen sich näherungsweise berechnen*) und geben jedesmal die Coordinaten des Punkts der Curve, in welchem die Tangente die durch den Werth von q angezeigte Neigung hat. Man kann deshalb die Curve zeichnen, indem sie durch eine Reihe von Punkten und die Richtungen der durch diese Punkte hindurchgehenden Tangenten bestimmt ist. Die Werthe für x und z, welche zu $q = 0$ gehören, geben die Coordinaten des Scheitelpunkts der Curve; der zu $z = 0$ gehörende Werth von x giebt die Wurfweite.

Diese Curve besteht nicht aus zwei im Scheitelpunkte zusammenstoßenden symmetrischen Armen; der herabsteigende Arm hat eine Vertikallinie zur Asymptote. Sind nämlich x' und z' zwei zu einander gehörige Werthe der Coordinaten x und z, welche einem sehr großen negativen q entsprechen, das wir durch q' bezeichnen wollen, und gehören ferner die beiden andern Werthe x'' und z'' von x und z dem noch größern negativen q'' an; so ist angenähert

$$x'' - x' = -\frac{m}{K}\int_{q'}^{q''}\frac{dq}{q^2} = \frac{m}{K}\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q''}\right)$$

$$z'' - z' = -\frac{m}{K}\int_{q'}^{q''}\frac{dq}{q} = -\frac{m}{K}.l\frac{q''}{q'}.$$

Da der erstere dieser Ausdrücke sich der Grenze 0 um so mehr nähert, je größer q' und q'' sind, und der zweite Ausdruck der Grenze $-\frac{1}{0}$ immer näher kommt; so folgert man den oben ausgesprochnen Satz.

Die Gleichung (6) giebt die Curvenlänge als Function der Neigung der Tangente.

---

*) Ein vollständig ausgerechnetes Beispiel findet man in Legendre Exercices de Calcul intégral, t. 1, p. 330.

§. 180. Wenn man in die aus Gleichung (4) leicht herzuleitende Formel $dt^2 = -\frac{1}{g} \, . \, dq \, . \, dx$ statt dx seinen obigen Werth setzt; so erhält man den Ausdruck für die Zeit, die der geworfene Körper gebraucht um einen gegebenen Theil der Curve zu durchlaufen: es ist also

$$dt = -\sqrt{\frac{m}{gK}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

oder

$$t = \sqrt{\frac{m}{gK}} \int_q^{\text{tang.}\theta} \frac{dq}{\sqrt{Q}}.$$

§. 181. Endlich bestimmt man die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers in einem gegebenen Punkte der Curve, welche wir durch v bezeichnen wollen, indem man nach Gleichung (4) dem Ausdruck $v^2 = (1+q^2)\frac{dx^2}{dt^2}$ diese Form giebt

$$v^2 = g^2(1+q^2)\frac{dt^2}{dq^2};$$

oder wenn man den obigen Werth von dt substituiert

$$v^2 = \frac{mg}{K} \cdot \frac{1+q^2}{Q}.$$

Giebt man q einen immer größern negativen Werth, so nähert sich diese Formel mehr und mehr dem Werthe $v^2 = \frac{mg}{K}$, was mit den in §. 122 gewonnenen Resultaten stimmt.

§. 182. Diese Formeln vereinfachen sich sehr für den Fall, wo die Anfangsrichtung der Bewegung sich sehr wenig von der Horizontalrichtung entfernt. Man darf nämlich dann in dem Theile der Curve, welcher oberhalb der Axe der x liegt, ohne merklichen Fehler statt der Bogenlänge s die Abscisse x in die Formeln einführen.

Dadurch erhält man aus Gleichung (3)

$$\frac{dx}{dt} = V.e^{-\frac{K}{m}.x},$$

und aus Gleichung (5)

$$dq = -\frac{g}{V^2}dx.e^{\frac{2K}{m}.x}.$$

Statt der Gleichung (6) leitet man hieraus ab

$$q = \text{tang}.\theta - \frac{mg}{2KV^2}\left(e^{\frac{2K}{m}.x} - 1\right).$$

Wenn man beachtet, daß $dz = qdx$, so findet man hieraus als Gleichung der Curve

$$z = x.\text{tang}.\theta - \frac{m^2 g}{4K^2V^2}\left(e^{\frac{2K}{m}x} - \frac{2K}{m}x - 1\right)^{*)}.$$

§. 183. Aus der Gleichung $\frac{dx}{dt} = V.e^{-\frac{K}{m}x}$ ergiebt sich der Ausdruck für die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers in einem beliebigen Punkte der Curve. Die Zeit, welche er gebraucht um einen gegebenen Theil der Curve zu durchlaufen, giebt die Formel

$$t = \frac{m}{KV}\left(e^{\frac{K}{m}x} - 1\right),$$

welche, wie es auch sein muß, mit den Formeln des §. 127 übereinstimmt.

---

*) Durch Entwicklung von $e^{\frac{2K}{m}x}$ erhält man die bequemere Formel:

$$z = x\text{tang}.\theta - \frac{g}{V^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{Kx^3}{3m} + \frac{K^2}{2.3m^2}x^4 + \frac{K^3}{3.5m^3}x^5 + \ldots\right).$$

XII. Bewegung der Planeten und Trabanten. Die Kepplerschen Gesetze. Princip der Gravitation des Weltalls.

§. 184. Die Astronomen haben aus Beobachtungen die Gesetze der Bewegung der Planeten um die Sonne und der Trabanten um die Planeten in mathematischen Formeln gegeben. **Die Bahnen der Weltkörper sind ziemlich genau** elliptisch und ihre Bewegungen sind gewissen allgemeinen Gesetzen unterworfen, welche man Kepplersche nennt. Nach diesen Gesetzen hat Newton die mechanische Ursache dieser Bewegung bestimmt, d. h. die Natur der auf die planetarischen Körper wirkenden Kräfte und ihrer gegenseitigen Einwirkungen. Er hat nachgewiesen, daß diese Einwirkungen die Folge einer gegenseitigen Anziehung aller Theile der Körper sind, deren Intensität sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen dieser Theile verhält. Wir wollen die Grundsätze vorlegen, aus denen jene wichtigen Resultate hergeleitet sind.

Erstes Kepplersches Gesetz. Die Bahnen der Planeten sind ebene Curven und die durch die Radii Vectores um den Mittelpunkt der Sonne beschriebenen Flächenstücke sind den Zeiten proportional: man schließt daraus, daß die Kraft, welche die Bewegung der Planeten bewirkt, gegen das Centrum der Sonne gerichtet ist.

§. 185. Dies kann unmittelbar aus §. 144 gefolgert werden. Um es direct zu beweisen, beziehen wir (Fig. 21) die Bahn des Planeten MN, dessen Mittelpunkt in M, wie der der Sonne in A liegt, auf zwei rechtwinklichte Axen Ax und Ay, welche durch das Centrum der Sonne hindurchgehen. Wenn wir sodann die Componierende der auf den Planeten wirkenden Kraft nach Richtung der x durch P,

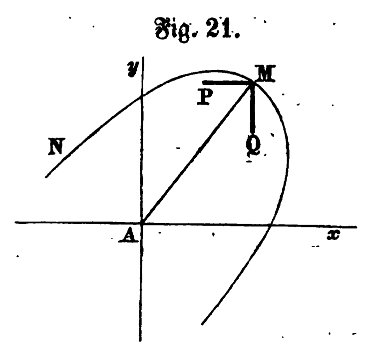


Fig. 21.

die nach Richtung der y mit Q bezeichnen, deren Richtung wir derartig annehmen, daß sie die positiven Coordinaten zu verkleinern suchen, und die Masse des Planeten mit m bezeichnen; so sind die Gleichungen der Bewegung desselben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -Q.$$

Daraus folgt

$$m\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = Py - Qx$$

oder

$$m\frac{d(xdy - ydx)}{dt^2} = Py - Qx.$$

Nun ist $xdy - ydx$ das Doppelte des durch den Radius Vector AM in dem Zeitelement dt beschriebenen Flächenstücks. Nach dem obigen Gesetze ist diese Größe in der ganzen Ausdehnung der Bahn constant. Da folglich ihr Differentialquotient $= 0$ ist, so ist

$$0 = Py - Qx \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} = \frac{x}{y}.$$

Die Kraft, deren Componierende P und Q sind, wirkt daher nach Richtung von MA.

Zweites Gesetz. Die Planeten beschreiben Ellipsen, in deren einem Brennpunkte der Mittelpunkt der Sonne liegt: hieraus schließt man, daß die Intensität der Kraft, welche die Bewegung der Planeten hervorbringt, an den verschiedenen Planeten sich

umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen derselben von der Sonne, verhält.

§. 186. Aus den Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -Q$$

leiten wir ab

$$m\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = -(Pdx + Qdy),$$

das integriert giebt

$$m\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2\int(Pdx + Qdy);$$

das Integral der rechten Seite der Gleichung ist in einem gegebenen Punkte den entsprechenden Werthen gemäß zu bestimmen.

Verwandeln wir die rechtwinklichten Coordinaten x und y in Polarcoordinaten, den Radius Vector AM durch r, und den Winkel, welchen r mit der Axe der x bildet, durch ω bezeichnend; so erhalten wir

$$x = r\cos.\omega, \quad y = r\sin.\omega.$$

Nennen wir ferner F die Resultierende der beiden Kräfte P und Q, welche, wie wir wissen, nach der Richtung von MA wirkt, so daß

$$P = F\cos.\omega, \quad Q = F\sin.\omega;$$

so geht die obige Gleichung in folgende über

$$m\frac{dr^2 + r^2d\omega^2}{dt^2} = -2\int Fdr.$$

Da dem ersten Gesetze gemäß die in der Zeit dt durch den Radius Vector beschriebenen Flächenstücke von constanter Größe sind; so ist, wenn C eine Constante bezeichnet

$$r^2d\omega = Cdt.$$

Hiernach verändert sich die Gleichung in

$$mC^2\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\omega}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]=-2\int F dr.$$

Daraus folgt

$$d\omega=\frac{Cdr}{r\sqrt{-C^2-2r^2\int\frac{F}{m}dr}}.$$

Diese Formel bestimmt die Gestalt der Bahn, wenn die Centralkraft F als Function der Entfernung r gegeben ist.

Differentiiert man die obige Gleichung, so giebt sie

$$F=mC^2\left[\frac{1}{r^3}-\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\omega}\right)^2}{dr}\right].$$

Dieser Ausdruck bestimmt die Kraft F, wenn die Gestalt der Bahn bekannt ist.

§. 187. Nach dem oben gegebenen Gesetze ist die Gestalt der Bahn eine Ellipse, deren einer Brennpunkt in A liegt. Die Gleichung der Curve ist also

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.(\omega-\varpi)},$$

wenn man
durch a die halbe große Axe der Ellipse,
durch e die Excentricität,
durch ϖ den Winkel, den die große Axe mit der Axe der x bildet, bezeichnet.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\omega}\right)^2=\frac{e^2\sin.(\omega-\varpi)^2}{a^2(1-e^2)^2}=\frac{2}{ar(1-e^2)}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2(1-e^2)}.$$

Hiernach wird der Ausdruck für F im vorigen §.

$$F=\frac{mC^2}{ar^2(1-e^2)},\quad \text{daher}\quad \frac{F}{m}=\frac{C^2}{ar^2(1-e^2)}.$$

Die nach Richtung von MA wirkende Kraft, welche die Bewegung des Planeten hervorbringt, ertheilt demselben

eine Geschwindigkeit $\frac{F}{m}$, welche während der ganzen Ausdehnung der Bahn der Größe $\frac{1}{r^2}$ proportional ist.

Drittes Gesetz. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich zu einander, wie die Cuben der großen Axen ihrer Bahnen. Man schließt daraus, daß die Bewegungen der verschiedenen Planeten durch ein und dieselbe Kraft hervorgebracht werden, deren Intensität im umgekehrten quadratischen Verhältniß zu der Entfernung dieser Körper von der Sonne steht.

§. 188. Da die von den Radii Vectores beschriebenen Flächenstücke den Zeiten proportional sind, so giebt die Gleichung $r^2 d\omega = Cdt$, in welcher $r^2 d\omega$ das Doppelte des in der Zeit dt beschriebenen Flächenstücks darstellt,

$$2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = CT,$$

wenn durch T die Umlaufszeit des Planeten bezeichnet wird. Setzt man in den Ausdruck für $\frac{F}{m}$ des vorigen §. den aus dieser Gleichung abgeleiteten Werth von C, so erhält man

$$\frac{F}{m} = \frac{4\pi^2 . a^3}{r^2 . T^2}.$$

Da nun das Verhältniß $\frac{a^3}{T^2}$ nach dem ausgesprochenen Gesetze für die verschiedenen Planeten constant ist, so ist der Werth von $\frac{F}{m}$ für die Einheit der Entfernung gleichfalls constant. Es wirkt also die von der Sonne ausgehende Kraft, welche die Bewegung der Planeten hervorbringt, in der ganzen Ausdehnung des Planetensystems gleichmäßig auf gleiche Massen, welche sich in gleichen Entfernungen von der Sonne befinden und es ändert sich diese Kraft nur so, wie sich die Entfernung ändert.

Princip der Gravitation im Universum.

§. 189. Da die Bewegung der Trabanten um die Planeten auf solche Gesetze schließen läßt, welche denen der Bewegung der Planeten um die Sonne fast gleich sind; so haben jene Resultate der Beobachtungen auf eine Hypothese hingeleitet, welche die Gesetze des Weltsystems in mathematischer Form giebt: man nimmt nämlich an, daß die Bewegung der Gestirne durch gegenseitige Anziehungskraft, wie sie zwischen allen materiellen Substanzen besteht, hervorgebracht werde; daß diese Kraft den Massen der sich anziehenden Theile proportional ist und sich umgekehrt, wie die Quadrate der jedesmaligen Entfernungen dieser Theile von einander verhält.

Die zwischen zwei planetarischen Körpern wirkende Anziehungskraft muß als aus allen Theilen dieser Körper emanierend angesehn werden. Da jedoch ihrer aller Gestalt eine fast völlig sphärische ist; so darf man, wie später nachgewiesen werden soll, ohne Fehler annehmen, daß die Attractionskraft vom Mittelpunkte der Planeten ausgeht und daß in diesem Punkte ihre ganze Masse concentriert ist.

Sind also die Massen zweier planetarischer Körper M und m, und ist r die Entfernung ihrer Mittelpunkte; so muß die Kraft, mit welcher jeder dieser Körper gegen den andern hingezogen wird, in Gewichtseinheiten durch $\frac{f.M.m}{r^2}$ ausgedrückt werden, wo f einen constanten Coefficienten bezeichnet. Wenn die Körper frei der Einwirkung dieser Kraft nachgäben; so würde sich der erstere dem zweiten so nähern, daß er in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{f.m}{r^2}$ erlangte; unter derselben Bedingung würde dem zweiten in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{f.M}{r^2}$ ertheilt. Denkt

man sich nun den ersten Körper als fest im Raume und berücksichtigt demnach nur die Bewegung des zweiten gegen den ersten hin; so wird offenbar diesem zweiten Körper die Summe der beiden Geschwindigkeiten in der Zeiteinheit ertheilt, also die Geschwindigkeit $\frac{f(M+m)}{r^2}$.

§. 190. Wenn man also durch M die Masse der Sonne, durch m die Masse des Planeten und durch r die jedesmalige Entfernung der Mittelpunkte beider Körper bezeichnet; so ertheilt die Kraft, welche unserer Hypothese gemäß die Bewegung des Planeten um die Sonne hervorbringt, der Masse m desselben in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{f(M+m)}{r^2}$. Ersetzt man in der Gleichung von §. 188 $\frac{F}{m}$ durch $\frac{f(M+m)}{r^2}$, so erhält man

$$f(M+m)=\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Das Verhältniß $\frac{a^3}{T^2}$ scheint demnach nicht für alle Planeten genau dasselbe zu sein, wenn wir von der Hypothese der Gravitation im Universum ausgehen. Es läßt sich indessen leicht aus der Kleinheit der Massen der Planeten gegen die der Sonne gehalten nachweisen, daß die Beobachtungen einen constanten Werth dieses Verhältnisses ergeben müssen.

§. 191. Indem wir von derselben Hypothese ausgehen, können wir von der Stärke der Schwerkraft an der Oberfläche der Erde auf die Intensität der Schwerkraft in den verschiedenen Punkten des Sonnensystems und auf die Verhältnisse der Massen aller seiner Theile schließen. Es sei m die Masse der Erde, μ die Masse eines in geringer Entfernung über ihrer Oberfläche liegenden Körpers, ϱ der Erdhalbmesser: der Körper strebt sich dem Mittelpunkte der Erde zu nähern und erlangt in der Zeiteinheit die

Geschwindigkeit $\frac{f(m+\mu)}{\varrho^2}$, wie im vorigen §. erwiesen ist; wenn μ gegen m gehalten sehr klein ist, schreibt man einfacher $\frac{fm}{\varrho^2}$. Es ist also

$$\frac{f.m}{\varrho^2} = g;$$

durch g bezeichnet man die Geschwindigkeit, welche einem schweren an der Oberfläche der Erde fallenden Körper in der Zeiteinheit ertheilt wird (man abstrahiert dabei von der Einwirkung der Umdrehung der Erde um ihre Axe und nimmt dieselbe als völlig sphärisch an). Vergleicht man diese Gleichung mit der vorigen, so erhält man

$$\frac{m}{M+m} = \frac{g\varrho^2 T^2}{4\pi^2 a^3}, \qquad \frac{m}{M} = \frac{g\varrho^2 T^2}{4\pi^2 a^3 - g\varrho^2 T^2},$$

als Ausdruck für das Verhältniß der Masse der Sonne zu der der Erde.

§. 192. Ist ferner m' die Masse eines andern Planeten, a' die halbe große Axe seiner Bahn, T' seine Umlaufszeit; so ergiebt die Gleichung von §. 190

$$f(M+m') = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2},$$

oder wenn man statt f seinen Werth $\frac{g\varrho^2}{m}$ setzt

$$m' = m \cdot \frac{4\pi^2 . a'^3}{g\varrho^2 T'^2} - M.$$

Das Verhältniß zwischen der Masse M der Sonne und der Masse m eines Planeten, der von einem Trabanten begleitet ist, kann auch auf folgende Art bestimmt werden. Ist μ die Masse des Trabanten, α die halbe große Axe seiner Bahn um den Planeten, τ seine Umlaufszeit; so giebt die Gleichung von §. 190 auf das System dieser beiden Körper angewandt

$$f(m+\mu) = \frac{4\pi^2\alpha^3}{\tau^2};$$

da man nun m gegen M und μ gegen m vernachlässigen darf, so folgt

$$\frac{m}{M} = \frac{\alpha^3 T^2}{a^3 \tau^2}.$$

§. 193. Man bestimmt die Geschwindigkeit g', welche den an der Oberfläche eines Planeten von der Masse m' und dem Halbmesser ϱ' fallenden Körpern in der Zeiteinheit ertheilt wird, dadurch, daß man die für diesen Planeten gültige Gleichung $\frac{f.m'}{\varrho'^2} = g'$, mit der ähnlichen Gleichung, welche für die Erde in §. 191 gegeben ist, vergleicht und erhält dadurch

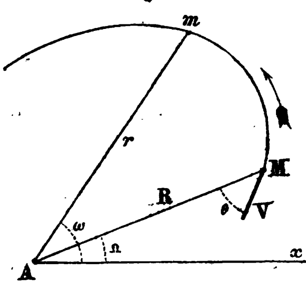
$$g' = g\,\frac{m'\varrho^2}{m\varrho'^2}.$$

XIII. Bewegung eines Körpers, welcher durch eine Kraft, die sich umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen verhält, gegen einen festen Mittelpunkt hingezogen wird.

---

§. 194. Es sei (Fig. 22) A ein fester Mittelpunkt und m die Masse eines Körpers, der gegen diesen Mittelpunkt hin durch eine Kraft angezogen wird, deren Werth in Gewichtseinheiten $= \frac{A}{r^2}$ für die Entfernung r des Körpers vom Centrum ist. Der bezeichnete Körper liege in dem Augenblick, in welchem man anfängt die Zeit zu zählen, in M in der Entfernung R vom festen Mittelpunkte und bewege sich mit einer Geschwindigkeit $= V$ in einer Richtung,

Fig. 22.



welche mit dem Radius R den Winkel θ bildet. Die anfängliche Lage des Radius Vector AM ist durch den Winkel Ω gegeben, den AM mit einer festen Axe Ax einschließt. Ax muß natürlich in der Ebene liegen, welche den Radius Vector AM und die Richtung der Geschwindigkeit V enthält. Auch die Curve, welche der Körper um den Mittelpunkt A beschreibt, liegt offenbar in derselben Ebene. Es ist nun unsere Aufgabe, die Gestalt dieser Curve und die Bewegung des Körpers zu bestimmen.

Zunächst folgt aus §. 185, daß die durch den Radius Vector beschriebenen Flächenstücke den Zeiten proportional sind, da die Kraft, welche die Bewegung des Körpers hervorbringt, von einem festen Mittelpunkt ausgeht. Das Doppelte des im ersten Zeitelement durch den Radius AM beschriebenen Flächenstücks ist $R.V.\sin.\theta.dt$. Die in §. 186 gegebene Gleichung $r^2 d\omega = Cdt$ gestaltet sich also in unserm Falle so

$$R.V.\sin.\theta.dt = Cdt \quad \text{oder} \quad C = R.V.\sin.\theta.$$

§. 195. Nennen wir zweitens die Geschwindigkeit, welche der Körper am Ende der Zeit t in m angelangt erhalten hat, v; so geht die in §. 186 aufgestellte Gleichung

$$m\,\frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} = -2\int F dr,$$

da hier $F = \frac{A}{r^2}$, über in

$$mv^2 = -2\int \frac{dr.A}{r^2} = \text{Const.} + \frac{2A}{r}.$$

Für den Augenblick, in welchem der Körper in seiner Anfangslage M ist, haben wir ebenso

$$mV^2 = \text{Const.} + \frac{2A}{R}; \text{ deshalb Const.} = mV^2 - \frac{2A}{R}$$

und

$$mv^2 = mV^2 - \frac{2A}{R} + \frac{2A}{r}.$$

§. 196. Die in §. 186 gefundene Gleichung

$$d\omega = \frac{Cdr}{r\sqrt{-C^2 - 2r^2\int\frac{F}{m}dr}}$$

geht demnach in folgende über

$$d\omega = \frac{Cdr}{r^2\sqrt{-\frac{C^2}{r^2} + V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{2A}{mr}}},$$

in welche man statt der Constante C den in §. 194 gefundenen Werth den für den Anfangszustand des Körpers gegebenen Größen gemäß hineinsetzen muß. Die vorige Gleichung läßt sich auch so schreiben

$$d\omega = \frac{-d.\frac{C}{r}}{\sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{C}{r} - \frac{A}{mC}\right)^2}{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}}}.$$

Integriert giebt sie

$$\omega = \text{Const.} + \text{arc. cos.} \frac{\frac{C}{r} - \frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}}.$$

Für die Anfangslage M ist also

$$\Omega = \text{Const.} + \text{arc. cos.} \frac{\frac{C}{R} - \frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}};$$

folglich ist der vollständige Werth von ω:

$$\omega = \Omega - \text{arc.cos.}\frac{\frac{C}{R} - \frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}} + \text{arc.cos.}\frac{\frac{C}{r} - \frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}}.$$

Man leitet daraus ab

$$r = \frac{C}{\frac{A}{mC} + \sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}.\cos.\left(\omega - \Omega + \text{arc.cos.}\frac{\frac{C}{R} - \frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}}\right)};$$

oder, wenn man C durch den in §. 194 gegebenen Werth ersetzt und zugleich zur Abkürzung schreibt

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{mR^2\,V^2\sin.\theta^2}{A}, \\ e &= \sqrt{\frac{m^2R^2V^2\sin.\theta^2}{A^2}\left(V^2 - \frac{2A}{mR} + 1\right)}, \\ \varpi &= \Omega - \text{arc.cos.}\left\{\frac{\frac{mR^2\,V^2\sin.\theta^2}{A} - 1}{\sqrt{\frac{m^2R^2V^2\sin.\theta^2}{A^2}\left(V^2 - \frac{2A}{mR}\right) + 1}}\right\}; \end{aligned}\right.$$

so ist

$$r = \frac{p}{1 + e\cos.(\omega - \varpi)}.$$

§. 197. Dies ist die Gleichung einer Curve der zweiten Ordnung, in welcher der Punkt A einer der Brennpunkte ist, p der halbe Parameter, e die Excentricität und ϖ der Winkel zwischen der halben großen Axe und der festen Axe Ax.

Die Bahn des Körpers ist eine Ellipse, wenn $MV^2 < \frac{2A}{R}$, ein Theil einer Parabel, wenn $mV^2 = \frac{2A}{R}$, endlich ein Stück von den Armen einer Hyperbel, wenn $mV^2 > \frac{2A}{R}$

ist. Die Gestalt dieser Bahn hängt demnach nicht von der Richtung der anfänglichen Bewegung ab, sondern allein von der Entfernung R und der Geschwindigkeit V. Wenn man $mV^2 = \frac{2A}{R}$ setzt, so folgt daraus $V = \sqrt{\frac{2A}{mR}}$: dies ist der Werth der Geschwindigkeit, welche ein mit einer Geschwindigkeit $= 0$ aus unendlicher Entfernung ausgehender Körper erreicht, wenn er sich bis auf die Entfernung R dem Centrum A nähert.

Nennt man, wie in §. 187, die halbe große Axe der Bahn a, d. h. die mittlere Entfernung oder den Mittelwerth zwischen den beiden äußersten Werthen $\frac{p}{1+e}$ und $\frac{p}{1-e}$ des Radius Vector r; so ist

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{RA}{2A - RmV^2}.$$

Der Werth der großen Axe der Bahn hängt demnach nicht von der anfänglichen Richtung der Bewegung des materiellen Punkts ab.

§. 198. Wenn wir in die §. 195 gefundene Gleichung $mv^2 = mV^2 - \frac{2A}{R} + \frac{2A}{r}$ die im vorigen §. für p und e entwickelten Ausdrücke hineinsetzen, so bekommen wir

$$v^2 = \frac{A}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right);$$

diese Gleichung läßt sich auch so schreiben

$$v = \sqrt{\frac{A}{m} \cdot \frac{2a - r}{ar}}.$$

Die Geschwindigkeit ist da im Maximum oder Minimum, wo der Körper durch den nächsten und durch den fernsten Scheitelpunkt der Curve hindurchgeht von dem Brennpunkt aus gerechnet, zu welchem hin der Körper gezogen wird.

In der Astronomie heißen diese Punkte Perihelium und Aphelium des Planeten.

§. 199. Eine Beziehung zwischen der Zeit und der Lage des Körpers in seiner Bahn giebt uns die Gleichung von §. 196;

$$d\omega = \frac{C dr}{r^2 \sqrt{-\frac{C^2}{r^2} + V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{2A}{mr}}}.$$

Weil nach §. 186 $r^2 d\omega = C dt$, so folgt aus dieser Gleichung

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{-C^2 + \left(V^2 - \frac{2A}{mR}\right) r^2 + \frac{2Ar}{m}}}$$

oder wenn man aus §. 194 für C^2 seinen Werth $= R^2 V^2 \sin. \theta^2$ setzt und die in §. 196 gegebenen Ausdrücke für p und e berücksichtigt

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{A}{m} p - \frac{A}{mp}(1 - e^2)^2 r^2 + \frac{2Ar}{m}}}.$$

Da diese Gleichung auch so geschrieben werden kann

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{\frac{Ap}{m(1-e^2)}} \cdot \sqrt{e^2 - \left[\frac{r(1-e^2)}{p} - 1\right]^2}},$$

oder wenn man $\frac{p}{1-e^2} = a$ setzt

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{\frac{Aa}{m}} \cdot \sqrt{e^2 - \left(\frac{r}{a} - 1\right)^2}};$$

so ist das Integral, das man leicht erhält, wenn man $\frac{r}{a} - 1 = e \cos. \varphi$ setzt, wo φ eine neue Veränderliche bezeichnet,

$$t = \text{Const.} - \sqrt{\frac{m.a^3}{A}}\left[\sqrt{e^2 - \left(\frac{r}{a} - 1\right)^2} + \text{arc.cos.}\frac{1}{e}\left(\frac{r}{a} - 1\right)\right].$$

Setzt man zuerst $r = a(1 - e)$ und dann $r = a(1 + e)$, so giebt diese Formel

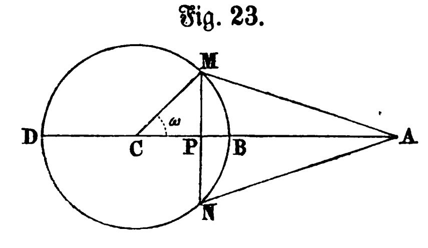
$$t = \text{Const.} - \pi\sqrt{\frac{m.a^3}{A}} \text{ und } t = \text{Const.}$$

Demnach ist die Dauer einer ganzen Umdrehung $= 2\pi\sqrt{\frac{m.a^3}{A}}$. Dies Resultat stimmt mit dem in §. 188 erhaltenen überein, weil hier $F = \frac{A}{r^2}$.

XIV. Anziehung eines materiellen Punkts durch einen sphärischen Körper. Veränderungen der Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde. Mittlere Dichtigkeit der Erde.

§. 200. Wir haben im Vorhergehenden angenommen, daß ein materieller Punkt durch die planetarischen Körper so angezogen wird, als ob die Anziehungskraft vom Mittelpunkt dieser Körper emanierte, gerade so, als ob ihre ganze Masse in diesem Punkte concentriert wäre. Diese Hypothese entspricht der Wahrheit, wenn man die Planeten als gleichförmige Kugeln, oder solche die aus gleichförmigen concentrischen Schichten bestehen, ansieht.

Fig. 23.



In Fig. 23 sei C der Mittelpunkt einer Kugelschicht von unendlich kleiner Dicke, deren Halbmesser CM wir durch R bezeichnen; der materielle Punkt,

dessen Masse m ist und der zunächst als außerhalb der Kugel liegend gedacht werde, liege in A; die Entfernung AC möge r genannt werden. Die Kraft, welche den materiellen Punkt gegen die Kugelschicht hinzieht, wirkt offenbar nach Richtung der Linie AC, wenn die Schicht gleichartig ist. Wir können nun diese Schicht in differentielle Elemente zerlegen, indem wir sie durch senkrecht auf AC stehende Ebenen schneiden. Wenn wir für eins dieser Elemente den Winkel MCA durch ω und die Entfernung AM durch x bezeichnen, so ist

$$MP = R \sin.\omega \quad \text{und} \quad x^2 = r^2 - 2Rr\cos.\omega + R^2.$$

Demnach ist das Volumen des differentiellen Elements

$$dR \, . \, 2\pi R \, . \sin.\omega \, . \, R d\omega.$$

Ist demnach μ für die Einheit des Volumens die Masse des Stoffs, aus dem die Schicht besteht, so ist die Masse des Elements

$$\mu \, . \, 2\pi R^2 dR \, . \, d\omega \, . \sin.\omega.$$

Weil aber die in M und N liegenden Theile des differentiellen Elements auf einen in A liegenden materiellen Punkt so einwirken, daß ihre Einwirkungen sich theilweise aufheben; so darf man nur die Componierenden derselben nach Richtung von AC berücksichtigen. Der Ausdruck für die Kraft, mit welcher der materielle Punkt durch das differentielle Element angezogen wird, ist demnach

$$\frac{f.\mu \, . \, m \, . \, 2\pi \, . \, R^2 \, . \, dR \, . \, d\omega . \sin.\omega}{x^2} \, . \, \frac{r - R\cos.\omega}{x}.$$

f bezeichnet hier, wie in §. 189 einen constanten Coefficienten; oder wenn man für ω den aus der obigen Gleichung zwischen ω und x abgeleiteten Werth hineinsetzt

$$f \, . \, \mu \, . \, m \, . \, \frac{\pi \, . \, RdR}{r^2} \, . \, dx \, \frac{x^2 + r^2 - R^2}{x^2}.$$

§. 201. Die Anziehung der gesammten Kugelschicht gegen den materiellen Punkt wird erhalten, wenn man das Integral zwischen den äußersten Werth von x, AB und AD, nimmt, also von $x = r - R$ bis zu $x = r + R$. Da nun das unbestimmte Integral ist

$$f \cdot \mu \cdot m \frac{\pi \cdot RdR}{r^2}\left(x - \frac{r^2 - R^2}{x}\right),$$

so ist der gesuchte Ausdruck

$$f \cdot \mu \cdot m \frac{4\pi R^2 dR}{r^2}.$$

$4\pi R^2$ ist die Oberfläche der Kugelschicht und $\mu . 4\pi R^2 dR$ die Masse derselben. Die Kraft, mit welcher diese Schicht einen außerhalb liegenden materiellen Punkt anzieht, ist demnach nicht von der verschieden, welche ein materieller Punkt von derselben Masse, der im Mittelpunkt jener Schicht liegt, ausüben würde.

§. 202. Dasselbe gilt natürlich auch von einer aus einer unendlichen Menge concentrischer Schichten bestehenden Kugel: ebenso leicht ersieht man, daß dies Resultat dasselbe bleibt, mag die Größe μ constant sein oder nur mit dem Halbmesser R sich verändern, wenn also die Kugel gleichförmig oder aus gleichförmigen concentrischen Schichten zusammengesetzt ist.

§. 203. Wenn μ constant ist, so ist die Kraft, mit welcher eine Schicht von endlicher Dicke zwischen den beiden Halbmessern R und R' den materiellen Punkt anzieht

$$f \cdot \mu \cdot m \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3 - R'^3}{r^2}.$$

Die Anziehungskraft einer Kugel von dem Halbmesser R ist also

$$f \cdot \mu \cdot m \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{r^2};$$

wenn der materielle Punkt auf der Oberfläche dieser Kugel liegt, so ist sie

$$f.\mu.m\frac{4\pi}{3}.R.$$

d. h. dem Kugelhalbmesser proportional.

§. 204. Wir haben ferner den Fall zu untersuchen, daß der von einer unendlich dünnen Kugelschicht angezogene materielle Punkt in A innerhalb dieser Schicht liegt (Fig. 24).

Fig. 24.

In diesem Falle gilt der in §. 200 gegebene Ausdruck für die Anziehung eines differentiellen Elements der Schicht völlig von den differentiellen Elementen, welche links von der senkrecht auf AC durch den Punkt A hindurchgelegten Ebene liegen. Die Anziehungskraft dieses Theils der Kugelschicht wird ausgedrückt durch das unbestimmte Integral

$$f.\mu.m\frac{\pi R dR}{r^2}\left(x - \frac{r^2-R^2}{x}\right),$$

das zwischen den beiden Grenzwerthen $x = AE$ und $x = AD$ genommen werden muß, also von $x = \sqrt{Rr - r^2}$ bis $x = R + r$. Die Anziehungskraft ist demnach

$$f.\mu.m\frac{\pi R dR}{r^2}\left(2R - \frac{Rr-2r^2+R^2}{\sqrt{Rr-r^2}}\right).$$

Berechnet man auf dieselbe Art den Werth der Anziehungskraft eines rechts von der Ebene EF liegenden unendlich kleinen Theiles der Kugelschicht, so erhält man

$$\frac{f.\mu.m.2\pi.R^2 dR.d\omega.\sin.\omega}{x^2}.\frac{R\cos.\omega - r}{x};$$

dieser Ausdruck läßt sich verwandeln in

$$f \cdot \mu \cdot m \frac{\pi R dR}{r^2} \cdot dx \cdot \frac{R^2 - r^2 - x^2}{x^2};$$

dessen unbestimmtes Integral ist

$$-f \cdot \mu \cdot m \frac{\pi R dR}{r^2}\left(x + \frac{R^2 - r^2}{x}\right).$$

Nimmt man das Integral zwischen den beiden Grenzwerthen $x = AB$ und $x = AE$, also von $x = R - r$ bis $x = \sqrt{Rr - r^2}$; so erhält man als Ausdruck für die Anziehungskraft dieses zweiten Theils der Kugelschicht

$$f \cdot \mu \cdot m \frac{\pi R dR}{r^2}\left(2R - \frac{Rr - 2r^2 + R^2}{\sqrt{Rr - r^2}}\right),$$

also der des ersten gleich. Da nun beide Anziehungskräfte nach entgegengesetzten Richtungen wirken, so heben sie sich offenbar gegenseitig auf: ein im Innern einer gleichförmigen Kugelschicht von unendlich kleiner Dicke liegender materieller Punkt wird demnach nach keiner Seite hin durch die Anziehungskraft gezogen.

§. 205. Natürlich erhält man dasselbe Resultat, wenn man auch der Kugelschicht eine endliche Dicke zuschreibt, vorausgesetzt, daß sich in derselben die Dichtigkeit nur mit dem Halbmesser ändert.

§. 206. Endlich ergiebt sich daraus, daß ein im Innern einer vollen Kugel gelegener materieller Punkt nur der Anziehungskraft der Kugel unterliegt, welche mit der erstern concentrisch ist und deren Oberfläche durch jenen Punkt hindurchgeht, weil alle diese Kugel umgebenden Schichten der erstern auf den Körper nur sich gegenseitig aufhebende Einwirkungen ausüben. Die Kraft, welche den materiellen Punkt gegen den Mittelpunkt hinzieht, ist demnach durch die letzte Formel in §. 203 gegeben und der Entfernung vom Mittelpunkte proportional, wie schon in §. 131 bemerkt wurde.

§. 207. Wenn die Erde eine vollkommene, aus gleichförmigen concentrischen Schichten bestehende Kugel und zugleich unbeweglich wäre; so würde für alle Punkte der Oberfläche die Intensität der Schwerkraft dieselbe sein und wäre überall gegen das Centrum gerichtet. Die Intensität würde im umgekehrten Verhältniß zu dem Quadrat der Entfernungen vom Mittelpunkte für die Körper stehen, welche in einiger Entfernung sich oberhalb der Oberfläche der Erde befinden. Daß angestellte Versuche nicht vollständig diese Gesetze bestätigen, läßt sich auf zwei Ursachen zurückführen: 1) ist die Erde nicht eine genaue Kugel und besteht nicht aus völlig genau concentrischen Schichten; 2) die aus der täglichen Umdrehung der Erde hervorgehende Centrifugalkraft componiert sich mit der Anziehungskraft der Erdmasse und vermindert die Wirkung dieser Kraft ein wenig. Weil die Erde nicht genau kugelförmig ist, wirkt 1) die Schwerkraft nicht genau nach der durch den Mittelpunkt angezeigten Richtung hin; 2) vermehrt sich die Intensität derselben vom Aequator nach den Polen hin, weil der Halbmesser um ein kleines Stück sich vermindert, das dem Sinus der Breite des Orts proportional ist.

§. 208. Die Einwirkung der Centrifugalkraft läßt sich auf solche Weise abschätzen. Die Erde vollendet die Umdrehung um ihre Axe in 86164 Secunden. Ist also R der mittlere Halbmesser der Erde, die wir als kugelförmig annehmen, so daß $R = \frac{10'000'000}{\frac{1}{2}\pi} = 6'366'198$ Meter, und L die Breite des Orts; so ist an demselben die Geschwindigkeit der Umdrehung $\frac{2\pi R \cos. L}{86164}$: folglich ist die Geschwindigkeit, welche in der Zeiteinheit die Centrifugalkraft nach Richtung des in der Ebene des Parallelkreises liegenden Halbmessers ertheilt, nach §. 148

$$\left(\frac{2\pi}{86164}\right)^2 R\,.\cos.L = (0{,}033853\,.\cos.L)\ \text{Meter.}$$

Die Componierende dieser Kraft nach Richtung der Einwirkung der Schwerkraft, die Größe also, um welche die aus der Umdrehung der Erde hervorgehende Centrifugalkraft die den frei fallenden Körpern in der Zeiteinheit durch die Schwerkraft ertheilte Geschwindigkeit vermindert, ist demnach

$$(0{,}033853\,.\cos.L^2)\ \text{Meter.}$$

Diese Verkleinerung beträgt um so weniger, je mehr man sich vom Aequator entfernt. Sowohl die Einwirkung der Centrifugalkraft, als auch die mangelhaft kugelförmige Gestalt der Erde vermehren demnach vom Aequator nach den Polen hin die Kraft, welche die frei fallenden Körper gegen das Centrum der Erde hinzieht.

Die den freifallenden Körpern in der Zeiteinheit ertheilte Geschwindigkeit haben wir durch g bezeichnet. Für die sechzigtheilige Secunde ist auf dem Pariser Observatorium $g = 9{,}80896$ Meter. In der Breite von 45^0 am Niveau des Meeres ist $g = 9{,}80557$ Meter. Für eine beliebige Breite ist unter demselben Niveau deshalb

$$g = 9{,}80557\,(1 - 0{,}002588\,.\cos.2L)\ \text{Meter.}$$

Soll diese Geschwindigkeit für einen Ort berechnet werden, der h Meter über der Oberfläche des Meeres liegt, so muß dieser Ausdruck noch multipliciert werden mit der Verhältnißzahl

$$\left(\frac{6'366'198}{6'366'198 + h}\right)^2.$$

Mittlere Dichtigkeit der Erde.

§. 209. Die mittlere Dichtigkeit der Erde zu berechnen hat man zwei Methoden angewandt: 1) Versuche über

Ablenkung des Bleiloths durch Anziehung naher Berge anzustellen; 2) die durch Anziehung eines Körpers hervorgebrachten Schwingungen zu beobachten; beide Arten von Resultaten vergleichen wir sodann mit der Anziehungskraft der Erde. Wir wollen im Folgenden kurz die wesentlichsten Momente beider Methoden entwickeln.

Ist A das Volumen der Erde und Π das mittlere Gewicht der Volumenseinheit ihres Stoffs, so wird die Masse der ganzen Erde durch $A . \frac{\Pi}{g}$ ausgedrückt, wenn man durch g hier, wie überall, die den schweren Körpern an der Oberfläche der Erde ertheilte Geschwindigkeit bezeichnet. Ist ferner a das Volumen eines nahen Berges, ϖ das Durchschnittsgewicht der Volumenseinheit seines Stoffes; so ist der Ausdruck für die Masse dieses Berges $a \frac{\varpi}{g}$. Wenn man dann durch c die Entfernung des Orts, in welchem man sich befindet, vom Schwerpunkt des Berges bezeichnet; so sind die Körper in diesem Orte unter Einwirkung 1) einer Vertikalkraft, die durch $f A \frac{\Pi}{g} . \frac{1}{R^2}$ dargestellt wird (f ist derselbe Coefficient wie in §. 189 und R der mittlere Halbmesser der Erde); 2) einer Kraft $f a \frac{\varpi}{g} . \frac{1}{c^2}$, mit welcher der Berg den Körper anzieht; letztere dürfen wir ohne merklichen Irrthum als horizontal annehmen. Das Bleiloth muß also nach Richtung der Resultierenden dieser beiden Kräfte hingezogen werden und wenn wir demnach den als meßbar vorliegenden Winkel, welchen der Faden des Loths mit der Vertikallinie einschließt, α nennen; so ist

$$\frac{a \varpi R^2}{A \Pi c^2} = \text{tang.}\, \alpha;$$

aus dieser Gleichung läßt sich leicht der Werth des

Die Constanten B und C müssen dem Anfangszustande des Körpers A gemäß bestimmt werden. Ist die Geschwindigkeit des Körpers $= 0$, wenn $t = 0$; so kann die obige Formel nur dann dieser Bedingung genügen, wenn $B = 0$; ist der Anfangswerth von ω auch $= 0$, so muß außerdem $C = -A$ sein. Der vollständige Werth von ω ist demnach

$$\omega = \frac{\frac{fm}{c^2 r}}{\frac{T}{\mu r} - \frac{2fm}{c^3}} \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{T}{\mu r} - \frac{2fm}{c^3}}\right).$$

§. 212. Aus dieser Gleichung erkennt man die Natur der Schwingungen, welche der Körper A macht; der Hebel bewegt sich dabei bis zu einer Lage, die mit ursprünglichen AA den Winkel

$$\frac{\frac{fm}{c^2 r}}{\frac{T}{\mu r} - \frac{2fm}{c^3}}$$

macht und dies ist zugleich der Ausdruck für die Entfernung des Hebels aus der Mittellage. Man kann die Weite dieser Schwingungen durch Beobachtung erkennen: bezeichnet man den durchlaufenen Bogen mit Ω, so ist demnach

$$\Omega = 2 \frac{\frac{fm}{c^2 r}}{\frac{T}{\mu r} - \frac{2fm}{c^3}}.$$

Die Dauer einer Schwingung ist überdies

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{T}{\mu r} - \frac{2fm}{c^3}}};$$

auch sie läßt sich durch Beobachtung ermitteln. Bezeichnet man sie durch θ, so hat man mit Rücksicht auf die obige Gleichung

$$\theta = \pi \sqrt{\frac{\Omega}{2} \cdot \frac{c^2 r}{f.m}}.$$

Wird nun, wie oben, die Masse der Erde durch $A\frac{\Pi}{g}$, ihr Halbmesser durch R bezeichnet; so erhalten wir aus der in §. 191 gegebenen Gleichung

$$\frac{f.A\frac{\Pi}{g}}{R^2} = g \quad \text{oder} \quad f = \frac{g^2 . R^2}{A.\Pi}.$$

Bezeichnet man ferner das Volumen des in D liegenden Körpers durch a, das Gewicht einer seiner Volumensein-heiten durch ϖ, so ist

$$m = a\frac{\varpi}{g}.$$

Die obige Gleichung nimmt, wenn diese Werthe sub-stituiert werden, folgende Gestalt an

$$\theta = \pi \sqrt{\frac{\Omega}{2} \cdot \frac{r}{g} \cdot \frac{c^2}{R^2} \cdot \frac{A\Pi}{a\varpi}},$$

woraus folgt

$$\frac{\Pi}{\varpi} = \theta^2 \frac{2}{\pi^2 \Omega} \cdot \frac{gR^2 a}{c^2 r A}.$$

Natürlich müssen die Versuche sehr vorsichtig angestellt werden und erheischen minutiöse Vorkehrungen. Die Be-obachtungen, welche Cavendish gemacht hat, lassen auf eine mittlere Dichtigkeit der Erde schließen, die der $5\frac{1}{2}$fachen des Wassers ungefähr gleich ist. Dies Resultat ist ein wenig größer, als das in §. 209 erwähnte.

Höhere Mechanik.

Zweiter Theil.

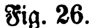
XV. Gleichgewicht des Seilpolygons. Seilcurve. Kettenlinie.

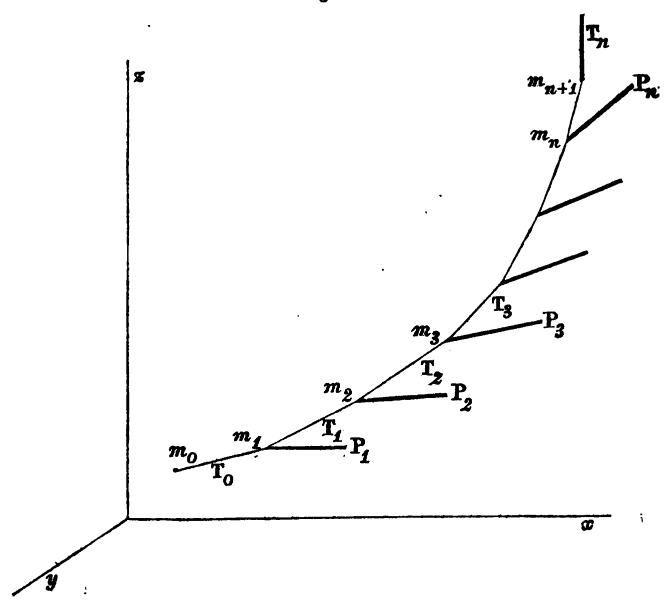
---

§. 213. Wenn ein völlig biegsamer und unausdehnsamer Faden mit dem einen Endpunkt an einem festen Punkte befestigt ist und auf mehrere Punkte in ihm Kräfte wirken; so sind offenbar, wenn Gleichgewicht besteht, die Theile des Fadens gespannt und verlaufen geradlinig zwischen den Ansatzpunkten je zweier benachbarter Kräfte: der Faden bildet also ein geradliniges Polygon, dessen Ecken die Ansatzpunkte der Kräfte sind und die Richtung der auf die Endpunkte des Polygons wirkenden Kräfte fällt mit der Richtung der letzten Seiten desselben zusammen. Der größern Allgemeinheit halber wollen wir hier das Polygon als nicht geschlossen ansehen.

In Fig. 26 sei m_0 der feste Punkt, in welchem das eine Ende des Fadens befestigt ist, das Polygon $m_0 m_1 m_2 m_3 \ldots m_n m_{n+1}$ stelle die durch den Faden gebildete Figur dar. Wir wollen alsdann bezeichnen

durch x_i, y_i und z_i die auf drei senkrecht auf einander stehenden Axen gezählten Coordinaten des Punktes m_i;


Fig. 26.



durch a_i, b_i, c_i die Winkel, welche die Axen der x, y und z mit der Seite $m_i m_{i+1}$ einschließen;

durch f_i die Länge dieser Seite;

durch P_i die auf den Punkt m_i wirkende Kraft;

durch α_i, β_i, γ_i die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den Axen der x, y und z bildet;

durch T_i die in der Seite $m_i\, m_{i+1}$ eintretende Spannung.

Offenbar muß, wenn das System im Gleichgewichte ist, jede der auf den Faden wirkenden Kräfte durch die Spannung aufgehoben werden, welche sie in den beiden ihrem Ansatzpunkte angrenzenden Polygonseiten hervorbringt. Es muß demnach die Richtung dieser Kraft mit diesen

beiden Seiten in einer Ebene liegen; zwischen ihrem Werthe und dem der beiden Spannungen bestehen die Beziehungen, welche nach §. 17 und ff. zwischen den Werthen dreier sich einander das Gleichgewicht haltender Kräfte bestehen. Die Spannung T_0 der ersten Seite ist also gleich und direkt entgegengesetzt der Resultierenden aus der Kraft P_1 und der Spannung T_1 der zweiten Seite. Ebenso ist die Spannung T_1 gleich und direkt entgegengesetzt der Resultierenden aus der Kraft P_2 und der Spannung T_2 der dritten Seite u. s. f. Folglich haben von einer beliebigen Seite $m_i m_{i+1}$ aus gerechnet alle Kräfte $P_{i+1}, \ldots P_n$, T_n, welche auf die dieser Seite folgenden Ansatzpunkte wirken, eine einzige Resultierende und die Spannung derselben Seite T_i ist dieser Resultierenden gleich und direkt entgegengesetzt.

Dieses ist die Hauptbedingung für das Bestehen des Gleichgewichts im Seilpolygone; sie läßt sich durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$T_i \cos. a_i = P_{i+1} \cos. \alpha_{i+1} + P_{i+2} \cos. \alpha_{i+2} \cdots + P_n \cos. \alpha_n + T_n \cos. a_n,$$

$$T_i \cos. b_i = P_{i+1} \cos. \beta_{i+1} + P_{i+2} \cos. \beta_{i+2} \cdots + P_n \cos. \beta_n + T_n \cos. b_n,$$

$$T_i \cos. c_i = P_{i+1} \cos. \gamma_{i+1} + P_{i+2} \cos. \gamma_{i+2} \cdots + P_n \cos. \gamma_n + T_n \cos. c_n,$$

welche für alle Werthe von i, von $i = 0$ bis zu $i = n - 1$ bestehen müssen. Indem man nach denselben von der vorletzten Seite des Polygons anfangend für alle Seiten die besondern Gleichungen aufstellt, ist man stets im Stande die Richtung und die Spannung jeder Seite zu bestimmen, wenn die Kräfte P gegeben sind und umgekehrt. Die Spannung der letzten Seite T_n ist offenbar der auf das freie Ende des Fadens wirkenden Kraft gleich; ebenso ist die Spannung T_0 der ersten Seite dem auf den festen Punkt geübten Drucke gleich, an welchem das erste Ende des Fadens befestigt ist. Wenn dies Ende des Fadens frei wäre, wie das entgegengesetzte Ende; so würde zum Gleich-

gewicht erforderlich sein, daß eine der Spannung T_0 gleiche und direkt entgegengesetzte Kraft auf dasselbe wirkte.

§. 214. Man bestimmt unmittelbar die Coordinaten der Eckpunkte des Polygons, wenn man statt $\cos.a_i$, $\cos.b_i$ und $\cos.c_i$ folgende Ausdrücke in die obigen Gleichungen hineinsetzt

$$\cos.a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{f_i}, \quad \cos.b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{f_i}, \quad \cos.c_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{f_i}.$$

§. 215. Wenn die Richtungen der Kräfte P jedesmal den zwischen zwei an einander stoßenden Seiten des Polygons liegenden Winkel halbieren, so muß die Spannung T in dem ganzen Umfange des Polygons constant sein. Nennt man den Winkel, welchen die beiden anliegenden Seiten im Punkte m_i bilden, θ_i; so gilt für alle Werthe von i folgende Beziehung

$$-P_i = 2\,T\cos.\frac{\theta_i}{2}.$$

§. 216. Wenn die Richtungen der Kräfte P_i sämmtlich einander parallel sind; so kann das Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn die Richtungen aller Kräfte und alle Polygonseiten in derselben Ebene liegen. Für den Fall, daß diese Ebene die der xy ist und daß zugleich alle Kräfte der vertikalen Axe der y parallel wirken, reducieren sich die in §. 213 gegebenen Gleichungen auf diese beiden

$$T_i \cos.a_i = T_n . \cos.a_n,$$

$$T_i \sin.a_i = P_{i+1} + P_{i+2} + \ldots + P_n + T_n \sin.a_n.$$

Hieraus findet man leicht den Werth der Spannung einer beliebigen Polygonseite und die Richtung derselben. Wenn man die Gleichungen durch einander dividiert, so erhält man

$$\text{tang}.a_i = \frac{P_{i+1} + P_{i+2} + \ldots + P_n + T_n \sin.a_n}{T_n \cos.a_n}.$$

Es folgt daraus, daß, wenn eine horizontale Seite in dem Polygon vorkommt, die Tangenten der Winkel, welche die Polygonseiten mit der Horizontalen einschließen, von jener aus gerechnet der Summe der Kräfte, welche von der horizontalen Seite an bis zu der jedesmal in Betracht kommenden wirken, proportional sind.

Es ergiebt sich ferner, daß die horizontalen Componierenden der Spannungen T_0 und T_n der äußersten Polygonseiten einander gleich sein müssen und daß die Differenz der vertikalen Componierenden dieser Spannungen der Summe der auf den Faden wirkenden Vertikalkräfte gleich ist. Ueberall hat die horizontale Componierende der Spannung einer beliebigen Polygonseite immer denselben Werth. Besteht endlich das Polygon aus zwei durch eine horizontale Seite getrennten Theilen; so sind die vertikalen Componierenden der Spannungen T_0 und T_n der äußersten Seiten, resp. gleich der Summe der vertikalen Kräfte, welche von der horizontalen Seite an bis zu dem entsprechenden Ende des Fadens hin wirken.

Untersuchung des besondern Falls, daß die Angriffspunkte der Kräfte an dem Faden sich ohne Widerstand verschieben lassen.

§. 217. Wenn der Angriffspunkt m_i der Kraft P_i an dem Faden sich ohne Widerstand verschieben läßt; so besteht augenscheinlich Gleichgewicht nur dann, wenn die Richtung dieser Kraft den Winkel halbiert, welchen die beiden dem Punkte m_i benachbarten Seiten einschließen; folglich werden die Spannungen dieser beiden Seiten einander gleich werden. Ferner besteht zwischen dem absoluten Werthe dieser Spannung und dem der Kraft das in §. 215 gegebene Verhältniß

$$-P_i = 2T\cos.\frac{\theta_i}{2}.$$

Wenn die Angriffspunkte aller Kräfte sich am Faden frei verschieben lassen, so muß die Spannung in der ganzen Ausdehnung desselben constant sein; die Richtung jeder Kraft halbiert stets den Winkel, welchen die beiden ihrem Angriffspunkte angrenzenden Seiten einschließen und ihre Werthe stehen zu der constanten Spannung in dem durch die vorhergehende Gleichung ausgedrückten Verhältnisse. Man kann sich dies dadurch versinnlichen, daß man sich eine Reihe von beliebig im Raum liegenden Ringen vorstellt, durch welche ein Faden gezogen ist. Sieht man ab von der Einwirkung der Reibung der Ringe gegen den Faden; so kann Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn man an beiden Enden des Fadens nach Richtung der letzten Theile desselben zwei gleiche und nach entgegengesetzten Richtungen ziehende Kräfte wirken läßt, welche den Faden gespannt halten. Jeder Ring trägt alsdann einen Druck, dessen Richtung in der Ebene liegt, welche die angrenzenden Theile des Fadens bestimmen; der Werth dieses Drucks ist gleich dem der Spannung multipliciert mit $2 \cos. \frac{\theta}{2}$, wenn man durch θ den zwischen diesen Theilen eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

Seilcurve.

§. 218. Wir müssen die in §. 213 angestellten Betrachtungen wieder aufnehmen, aber so, daß wir die auf den Faden wirkenden Kräfte nicht auf einzelne durch Zwischenräume getrennte Punkte wirken lassen, sondern continuierlich auf die ganze Ausdehnung des Fadens. Demnach bezeichnen wir

durch x, y, z die rechtwinklichten Coordinaten eines beliebigen Punkts m des Fadens;

durch s die Länge des Bogens der Curve, die der Faden bildet, bis zum Punkte m;

durch s_0 und s_ω die Bogenlängen dieser Curve bis zum ersten und bis zum letzten Punkte des Theiles, auf den die Kräfte wirken;

durch a_0, b_0, c_0 und a_ω, b_ω, c_ω die Winkel, welche die Axen der x, y und z mit den Tangenten einschließen, die an den ersten und an den letzten Punkt dieses Theils des Fadens gelegt sind;

durch p den Werth der auf den Punkt m wirkenden Kraft, der auf die Längeneinheit bezogen als Function des Bogens s gegeben ist;

durch α, β, γ die Winkel, welche die Axen der x, y, z mit der Richtung der Kraft p einschließen, so daß sie gleichfalls als Function des Bogens s gegeben sind;

durch T den Werth der Spannung des Fadens im Punkte m;

durch T_0 und T_ω die Werthe der Spannung im ersten und im letzten Punkte des Theils des Fadens, auf welchen die Kräfte wirken.

Statt der drei in §. 213 aufgestellten Gleichungen ergeben sich hier aus demselben Principe folgende

$$T\frac{dx}{ds} = \int_s^{s_\omega} ds \,.\, p \cos.\alpha + T_\omega \cos. a_\omega,$$

$$T\frac{dy}{ds} = \int_s^{s_\omega} ds \,.\, p \cos.\beta + T_\omega \cos. b_\omega,$$

$$T\frac{dz}{ds} = \int_s^{s_\omega} ds \,.\, p \cos.\gamma + T_\omega \cos. c_\omega.$$

Diese Gleichungen müssen für die ganze Ausdehnung der Curve bestehen und bestimmen die Gestalt derselben. Für den ersten Punkt der Curve gestalten sie sich so:

$$T_0 \cos. a_0 = T_\omega \cos. a_\omega + \int_{s_0}^{s_\omega} ds . p \cos. \alpha,$$

$$T_0 \cos. b_0 = T_\omega \cos. b_\omega + \int_{s_0}^{s_\omega} ds . p \cos. \beta,$$

$$T_0 \cos. c_0 = T_\omega \cos. c_\omega + \int_{s_0}^{s_\omega} ds . p \cos. \gamma.$$

§. 219. Aus den drei obigen Gleichungen erhält man

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\int_s^{s_\omega} ds . p \cos. \alpha + T_\omega \cos. a_\omega}{\int_s^{s_\omega} ds . p \cos. \gamma + T_\omega \cos. c_\omega},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\int_s^{s_\omega} ds . p \cos. \beta + T_\omega \cos. b_\omega}{\int_s^{s_\omega} ds . p \cos. \gamma + T_\omega \cos. c_\omega}.$$

Dies sind die beiden Differentialgleichungen der Curve. Aus denselben Gleichungen leitet man ab

$$T^2 = \left(\int_s^{s_\omega} ds . p \cos. \alpha + T_\omega \cos. a_\omega\right)^2 + \left(\int_s^{s_\omega} ds . p \cos. \beta + T_\omega \cos. b_\omega\right)^2 + \left(\int_s^{s_\omega} ds . p \cos. \gamma + T_\omega \cos. c_\omega\right)^2,$$

als Ausdruck für das Quadrat der Spannung in einem beliebigen Punkte.

§. 220. Differentiiert man die drei Gleichungen des §. 218, so erhält man

$$Td\frac{dx}{ds} + dT\frac{dx}{ds} = -ds.p\cos.\alpha,$$

$$Td\frac{dy}{ds} + dT\frac{dy}{ds} = -ds.p\cos.\beta,$$

$$Td\frac{dz}{ds} + dT\frac{dz}{ds} = -ds.p\cos.\gamma.$$

Multipliciert man diese drei Gleichungen bezüglich mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, und addiert sie alsdann; so erhält man, weil $\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2} = 1$ und deshalb $\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds} = 0$ ist,

$$-dT = p\cos.\alpha dx + p\cos.\beta dy + p\cos.\gamma dz.$$

Aus dieser Formel erkennt man das Gesetz, nach welchem die Spannung in den verschiedenen Punkten des Fadens sich ändert. Der unendlich kleine Zuwachs der Spannung ist gleich der auf den unendlich kleinen Theil des Fadens wirkenden Kraft, welche nach der Richtung dieses Elements zerlegt ist.

§. 221. Um die Anwendung der voranstehenden Resultate auf einige bestimmte Fälle zu geben, wollen wir zunächst annehmen, daß die durch p bezeichnete Kraft überall senkrecht gegen die durch den Faden gebildete Curve wirkt. Dann ist der Werth von $dT = 0$, folglich ist die Spannung in der ganzen Ausdehnung des Fadens constant. Ferner reducieren sich die drei Gleichungen des vorigen §. auf

$$Td\frac{dx}{ds} = -ds.p\cos.\alpha,$$

$$Td\frac{dy}{ds} = -ds.p\cos.\beta,$$

$$Td\frac{dz}{ds} = -ds.p\cos.\gamma.$$

Die auf den Faden wirkende Kraft muß, wenn sich derselbe im Gleichgewichtszustande befindet, in der Krümmungsebene der Curve, die der Faden bildet, oder nach Richtung des Halbmessers ihres Krümmungskreises wirken, weil die Cosinus der Winkel α, β und γ resp. den Größen $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ proportional sein müssen (vergl. Lehrb. der Diff. Rechn. I. §. 237). Ersetzt man also hier $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$ durch die Ausdrücke für die Cosinus der Winkel, welche die Axen mit dem Halbmesser des Krümmungskreises einschließen; so erhalten wir aus jenen drei Gleichungen, wenn wir durch ϱ die Länge jenes Halbmessers bezeichnen

$$T = -p\varrho \quad \text{oder} \quad p = -\frac{T}{\varrho}.$$

Wenn also ein Faden über eine feste Fläche gespannt ist, so ist der Werth des gegen die Fläche geübten Drucks für eine Längeneinheit in jedem Punkte des Fadens gleich der Spannung dividiert durch den Halbmesser des Krümmungskreises. Die praktische Mechanik hat diesen Satz in mehreren wichtigen Aufgaben anzuwenden.

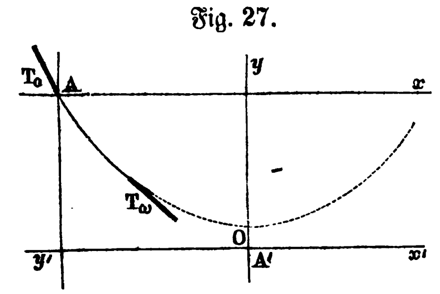
Dieser Satz kann auch unmittelbar aus der in §. 215 gegebenen Formel abgeleitet werden; da nämlich die Angriffspunkte der Kräfte P_1 in unendlich kleinen Entfernungen von einander liegen, so ist

$$P_1 = pds, \quad \cos.\frac{\theta_1}{2} = \sin.\tfrac{1}{2}\frac{ds}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\frac{ds}{\varrho}.$$

Kettenlinie.

§. 222. Wir nehmen zweitens den besondern Fall, daß die mit p bezeichnete Kraft constant ist und der Vertikallinie parallel wirkt: in diesem Falle hat man der Seilcurve den Namen Kettenlinie gegeben. Aus §. 216 folgt, daß alle Theile dieser Curve in derselben Vertikalebene liegen. Diese Ebene sei die der xy, die Richtung der Kraft p sei der Axe der y parallel und das erste Ende des Fadens liege im Anfangspunkte der Coordinaten (Fig. 27). Wenn

Fig. 27.



wir durch P_0 und P_ω die vertikalen Componierenden der Spannungen T_0 und T_ω in den beiden Endpunkten des Fadens, durch Q den Werth der horizontalen Componierenden dieser Spannungen bezeichnen, — in §. 216 ist bewiesen, daß der Werth der horizontalen Componierenden der Spannung für alle unendlich kleinen Theile des Fadens derselbe ist —; so reducieren sich hier die Gleichungen des §. 218 auf

$$T\frac{dx}{ds} = - T_\omega \cos. a_\omega = Q, \qquad \text{(a)}$$

$$T\frac{dy}{ds} = p(s_\omega - s) + P_\omega, \qquad \text{(b)}$$

und aus der Gleichung des §. 220 läßt sich herleiten

$$dT = - p dy. \qquad \text{(c)}$$

Die Gleichung der Curve, die der Faden bildet, läßt sich so am einfachsten entwickeln: die Integration der Gleichung (c) giebt

$$T = \text{Const.} - py;$$

oder da im Punkte A, wo $y = 0$, $T = T_0$; so ist

$$T = T_0 - py. \qquad \text{(d)}$$

Substituiert man diesen Werth in Gleichung (a), so erhält man

$$T_0 - py = Q\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}; \qquad \text{(e)}$$

daher ist

$$dx = \pm \frac{Q\,dy}{\sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}.$$

Das Vorzeichen + gehört dem niedergehenden Theile der Curve bis zum tiefsten Punkte, das Vorzeichen — dem steigenden Theile von diesem Punkte aus an. Durch Integration erhält man

$$x = \text{Const.} + \frac{Q}{p}.l.\left[T_0 - py \mp \sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}\right];$$

oder, wenn man die Constante so bestimmt, daß $x = 0$, wenn $y = 0$ ist:

$$x = \frac{Q}{p}.l.\frac{T_0 - py \mp \sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}{T_0 - P_0}. \qquad \text{(f)}$$

Geht man von den Logarithmen auf den Numerus zurück, so erhält man folgende Gleichung für die Kettenlinie

$$T_0 - py = \tfrac{1}{2}(T_0 - P_0)e^{\frac{px}{Q}} + \tfrac{1}{2}(T_0 + P_0)e^{-\frac{px}{Q}}. \qquad \text{(g)}$$

§. 223. Bezeichnet man durch h die Abscisse, durch f die Ordinate des tiefsten Punkts O der Curve, in welchem $\frac{dy}{dx} = 0$; so findet man aus den Gleichungen (e) und (f)

$$h = \frac{Q}{p}.l\frac{Q}{T_0 - P_0}, \qquad f = \frac{T_0 - Q}{p}.$$

§. 224. Aus den Gleichungen (a) und (b) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(s_\omega - s) + P_\omega}{Q};$$

setzt man diesen Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ dem aus Gleichung (e) abgeleiteten gleich, so erhält man

$$s = s_\omega + \frac{P_\omega \mp \sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}{p}. \qquad \text{(h)}$$

Da in dem Werthe von y, welcher dem Scheitelpunkt O angehört, die Wurzelgröße $\sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2} = 0$; so ist, wenn man die Länge der Curve vom Anfangspunkte A bis zum Scheitelpunkte O durch C bezeichnet

$$C = s_\omega + \frac{P_\omega}{p}, \quad \text{deshalb} \quad s = C \mp \frac{\sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}{p}.$$

§. 225. Einfacher erhält man die obigen Resultate, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Punkt A' verlegt, der in der den tiefsten Punkt O der Curve enthaltenden Vertikallinie liegt, so daß die Entfernung $OA' = \frac{Q}{p}$, und wenn die neuen vertikalen Ordinaten y' von unten nach oben gezählt werden. Setzt man nämlich

$$x' = x - \frac{Q}{p} . l \frac{Q}{T_0 - P_0} \quad \text{und} \quad y' = \frac{T_0 - py}{p};$$

so erhält man statt der Gleichungen (d), (f), (g) und (h)

$$T = py',$$

$$x' = \frac{Q}{p} . l . \frac{py' \mp \sqrt{p^2 y'^2 - Q^2}}{Q},$$

$$y' = \frac{Q}{2p}\left(e^{\frac{px'}{Q}} + e^{-\frac{px'}{Q}}\right),$$

$$s = \sqrt{y'^2 - \frac{Q^2}{p^2}} = \frac{Q}{2p}\left(e^{\frac{px'}{Q}} - e^{-\frac{px'}{Q}}\right).$$

Ferner ist der Werth des Halbmessers des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt, dessen Ordinate $= y'$ ist, $= \frac{py'^2}{Q}$, für den Punkt O ist derselbe $= \frac{Q}{p}$.

Diese Gleichungen enthalten allein die Größe Q, die horizontale Componierende der Spannung, welche nach der Gleichung (a) für die ganze Ausdehnung der Curve stets den nämlichen Werth behält. Durch diese Gleichungen läßt sich stets die Gestalt der Curve bestimmen, die der Faden bildet, wenn man die Länge desselben und die Lage seiner Endpunkte gegen einander als bekannt annimmt.

§. 226. Wenn die auf die Punkte der Curve wirkende Vertikalkraft nicht mehr, wie dies in §. 222 und ff. angenommen wurde, der Länge der Theile dieser Curve, sondern der horizontalen Projection derselben proportional ist; so erhält man statt der Gleichungen (a), (b) und (c) in §. 222 folgende:

$$T\frac{dx}{ds} = T_\omega \cos. a_\omega = Q, \qquad (l)$$

$$T\frac{dy}{ds} = p(x_\omega - x) + P_\omega, \qquad (m)$$

$$dT = -pdx\frac{dy}{ds} = -\frac{pdy}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \qquad (n)$$

Aus den Gleichungen (l) und (m) erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x_\omega - x) + P_\omega}{Q}, \qquad (o)$$

oder integriert

$$y = \frac{p\left(x_\omega x - \frac{x^2}{2}\right) + P_\omega x}{Q} \qquad (p)$$

Die Curve, welche der Faden bildet, ist demnach eine Parabel, deren Axe vertikal ist.

Der Werth der Spannung in einem beliebigen Punkte dieser Curve ist nach Gleichung (l)

$$T = Q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (q)$$

§. 227. Bezeichnet man durch h die Abscisse, durch f die Ordinate des tiefsten Punkts der Curve, in welchem die Tangente horizontal ist, also des Scheitelpunkts der Parabel; so geben die Gleichungen (o) und (p)

$$h = x_\omega + \frac{P_\omega}{p}, \quad f = \frac{p}{2Q}\left(x_\omega + \frac{P_\omega}{p}\right)^2.$$

Die Länge des Bogens findet man auf die bekannte Weise, indem man den Ausdruck $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ integriert, nachdem man $\frac{dy}{dx}$ durch den in Gleichung (o) gegebenen Werth ersetzt hat.

§. 228. Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten von dem Punkt A in den Scheitelpunkt verlegt und die neuen Ordinaten y' von unten nach oben zählt; so muß man x in $x'+h$ und y in $f-y'$ verwandeln. Die Substitution dieser Werthe giebt folgende Gleichungen:

$$y' = \frac{px'^2}{2Q},$$

$$\frac{P_0}{Q} = \text{tang.}\, a_0 = \frac{2f}{h},$$

$$Q = \frac{ph^2}{2f},$$

$$T = \frac{ph^2}{2f}\sqrt{1+\left(\frac{2fx'}{h}\right)^2}.$$

Bezeichnet man durch s' den Werth des zur Abscisse x' gehörigen Bogens vom Punkte A' aus gerechnet, so ist

$$s' = x' + \frac{h^2}{2l}\left[\frac{1}{3.2}\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^3 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^5 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^7 - \ldots\right].$$

Setzt man $x' = h$; so ist c, der zugehörige Werth von s'

$$c = h\left[1 + \frac{1}{3.2}\left(\frac{2f}{h}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2f}{h}\right)^4 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2f}{h}\right)^6 - \ldots\right].$$

Man erhält daraus

$$\left(\frac{2f}{h}\right)^2=6\left[\frac{c-h}{h}+\frac{9}{10}\left(\frac{c-h}{h}\right)^2-\frac{54}{175}\left(\frac{c-h}{h}\right)^3+\frac{207}{350}\left(\frac{c-h}{h}\right)^4-\dots\right].$$

Von diesen Formeln macht man in der praktischen Mechanik oft Anwendung, zumal bei der Construction der Brücken, welche in eisernen Ketten hängen.

XVI. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 229. Schon bei der Entwickelung der Grundgesetze der Statik im ersten Capitel ist nachgewiesen, daß jedes von ihnen als Ausgangspunkt für den Beweis aller andern dienen konnte. Man darf daraus schließen, daß alle jene Grundgesetze in einem einzigen weit allgemeinern Satze enthalten sein müssen, welcher in jedem Falle die Bedingungen, welche die Kräfte eines Systems erfüllen müssen um sich gegenseitig das Gleichgewicht zu halten, vollständig ausdrückt.

Wir müssen zunächst genauer und ausführlicher erklären, was man unter Kräftesystem versteht. In Cap. I und II sind die Bedingungen des Gleichgewichts für einen einzigen materiellen Punkt entwickelt, in Cap. III und IV für eine Vereinigung mehrerer so unveränderlich unter sich verbundener materieller Punkte, daß die Figur, welche das System bildet, keinerlei Veränderung erleiden kann. Man kann sich ein solches System so gebildet denken, daß die Punkte, auf welche die Kräfte wirken, unter sich durch unbiegsame Stäbe verbunden sind, welche bewirken, daß die Punkte des Systems stets von einander die nämliche Entfernung behalten; hierzu ist freilich nicht gerade nöthig,

daß alle materiellen Punkte mit jedem andern auf diese Weise verbunden sind; es genügt z. B. auch, daß drei beliebige Punkte so verbunden werden, daß sie ein unveränderliches Dreieck bilden, daß dies Dreieck dann als gemeinsame Basis von Pyramiden angesehen wird, in deren Gipfeln die übrigen materiellen Punkte liegen. Wenn die Kanten dieser Pyramiden völlig unbiegsam sind; so kann offenbar die Figur, welche die materiellen Punkte bilden, keinerlei Veränderung erleiden.

Ein System von unveränderlicher Gestalt stellt man sich vor als eine Vereinigung materieller Punkte, die unter sich durch unbiegsame Stäbe verbunden sind. Die Zahl dieser Stäbe muß groß genug angenommen werden, um die Punkte stets in der nämlichen Lage und in derselben Entfernung gegen einander zu erhalten; und man leistet dieser Forderung stets Genüge, wenn man die Entfernung eines beliebigen materiellen Punkts von wenigstens drei andern Punkten des Systems unveränderlich gemacht hat.

§. 230. In Cap. XV, wo von dem Gleichgewicht des Seilpolygons die Rede war, lag uns eine andere Art von System vor. Hier nämlich ist jeder der materiellen Punkte allein mit zwei benachbarten durch unausdehnsame Fäden verbunden, welche die Entfernung dieser Punkte unveränderlich erhalten, während die Gesammtheit der materiellen Punkte jede beliebige Gestalt annehmen kann, die nur mit jener Bedingung sich verträgt. In dem besondern Falle des §. 217 bestand diese Bedingung allein darin, daß die Summe der Entfernungen zweier oder mehrerer benachbarter Punkte stets einen bestimmten und constanten Werth behalten muß.

Die Systeme sind demnach im allgemeinen von zweifacher Art: bei den einen kann sich die Lage der Angriffspunkte der Kräfte gegen einander in keiner Weise ändern;

bei den andern sind die das System bildenden materiellen Punkte so unter sich verbunden, daß diese Punkte gewisse von bestimmten Bedingungen abhängende Bewegungen gegen einander annehmen dürfen und die Gesammtheit derselben verschiedene Gestalten annimmt. Ein System ist bestimmt, wenn die Zahl der materiellen Punkte, die es bilden, angegeben und die Art, wie sich diese Punkte gegen einander oder gegen andere als fest im Raume angenommene Punkte verschieben lassen, bekannt ist.

Die Maschinen sind sämmtlich derartige Systeme; natürlich müssen wir uns zunächst dabei denken, daß die materiellen Punkte, welche das System bilden, mit einander durch völlig unbiegsame Stäbe oder durch unausdehnsame, vollkommen biegsame Fäden, die noch dazu als masselos angenommen werden müssen, verbunden sind; wir müssen uns denken, daß diese Fäden oder Stäbe die Entfernungen eines Theils der dem System angehörigen Punkte, wenn man zu je zweien dieselben zusammen nimmt, unveränderlich machen, ohne jedoch zu verhindern, daß die Gesammtheit der Punkte gewisse Bewegungen gegen einander machen und mehrere von einander verschiedene Figuren bilden kann.

§. 231. Nachdem wir dies voranfgeschickt haben, wollen wir zuerst darlegen, worin das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten besteht, dann die Wahrheit desselben an den einfachen Maschinen nachweisen und endlich den allgemeinen Beweis desselben geben.

Wenn wir uns ein beliebiges System denken, und uns die unendliche Reihe von verschiedenen Gestalten vorstellen, welche das System nach und nach annehmen kann, so weit sie natürlich sich mit der Art, wie die materiellen Punkte verbunden sind, vereinigen lassen; wenn wir dann das System in einer bestimmten Lage fixieren und uns fragen, welches Verhältniß unter den Kräften, die wir auf das

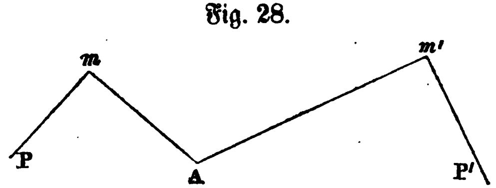
System wirken lassen, bestehen muß, damit dieselben einander das Gleichgewicht halten: so muß diese Frage folgendermaßen beantwortet werden. Lassen wir in dem Systeme eine geringe Veränderung der Gestalt eintreten, wie sie die Art der Verbindung unter den das System bildenden materiellen Punkten gestattet; so durchlaufen die Angriffspunkte der Kräfte unendlich kleine Wege; denken wir uns ferner diese von jedem der Angriffspunkte zurückgelegten Wege auf die Richtungen der auf jeden dieser Punkte wirkenden Kräfte projiciert und bezeichnen durch δp den unendlich kleinen Weg, den der Angriffspunkt der Kraft P auf der Richtung dieser Kraft durchlaufen hat; so nennt man das Product $P.\delta p$, nämlich der Kraft P in den durch den Angriffspunkt auf ihrer Richtung zurückgelegten Weg δp, das virtuelle Moment der Kraft P. Man nimmt diese Größe als positiv an, wenn der Weg δp nach derselben Richtung hin sich erstreckt, wie die Wirkung der Kraft, als negativ im entgegengesetzten Falle. Die auf das System wirkenden Kräfte stehen nun, wenn sie einander das Gleichgewicht halten, in dem Verhältnisse, daß der Werth der Summe, wenn man die virtuellen Momente aller Kräfte addiert, $= 0$ ist. Es genügt demnach die einzige Gleichung

$$S.P.\delta p = 0$$

in allen Fällen, um die Bedingungen auszudrücken, unter denen das System im Gleichgewichte ist.

§. 232. An den einfachen Maschinen läßt sich die Richtigkeit dieses Satzes leicht nachweisen. Beim Hebel bilden die Angriffspunkte der Kräfte m und m' (Fig. 28) mit dem festen Punkte A ein Dreieck von unveränderlicher Gestalt, das sich frei um diesen Punkt drehen kann ohne aus der Ebene herauszutreten, in welcher auch die Richtungen

Fig. 28.



der Kräfte P und P' liegen. Immer kann man die Seiten Am und Am' als senkrecht gegen jene Richtungen annehmen. Dreht sich nun das Dreieck um den unendlich kleinen Winkel $d\omega$ um den Punkt A nach der Richtung der Kraft P, so hat man hier

$$\delta p = Am . \delta\omega, \quad \delta p' = - Am' . \delta\omega.$$

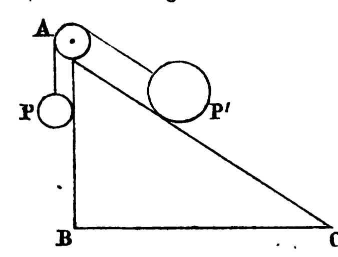
Nach der obigen Gleichung hat man daher

$$P.Am.\delta\omega - P'.Am'.\delta\omega = 0 \quad \text{oder} \quad P.Am = P'.Am'.$$

Dasselbe gilt augenscheinlich auch vom Rade an der Welle und vom Haspel.

§. 233. Wenn zwei Gewichte P und P' (Fig. 29) an den Enden eines Fadens befestigt sind, welcher in A über eine feste Rolle hinübergeht, so daß das Gewicht P' zum Theil durch die geneigte Ebene AC getragen wird; so kann sich das Gewicht P nur vertikal, P' nur parallel zu AC bewegen, wobei zugleich die Länge des Fadens unveränderlich ist.

Fig. 29.



Wird nun dem System der beiden Gewichte eine Bewegung ertheilt, so daß P vertikal um δp herabgeht; so steigt P' vertikal um $\delta p . \frac{AB}{AC}$. Die Bedingung des Gleichgewichts ist also

$$P.\delta p - P'.\delta p . \frac{AB}{AC} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{P}{P'} = \frac{AB}{AC}.$$

§. 233. Eine vertikale Schraube trage eine Last Q auf einer beweglichen Schraubenmutter und eine horizontal wirkende Kraft, die nach Richtung der Tangente auf den Umfang eines mit dieser Schraubenmutter verbundenen Kreises wirkt, halte der Last das Gleichgewicht. Bezeichnen wir durch h die Höhe eines Schraubengewindes, durch r den Halbmesser des Kreises; so wird, wenn die Schraube sich um den unendlich kleinen Winkel $\delta\omega$ dreht, der Angriffspunkt der Kraft P auf der Richtung dieser Kraft den Weg $r.\delta\omega$ durchlaufen und das Gewicht Q wird um die Größe $\frac{h\delta\omega}{2\pi}$ steigen (π bezeichnet das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser). Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist also das System im Gleichgewichte, wenn

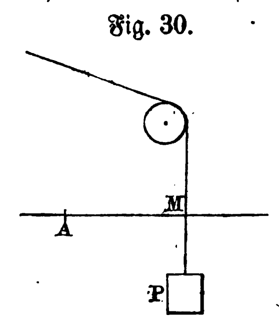
$$P.r\delta\omega - Q\frac{h\delta\omega}{2\pi} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} = \frac{h}{2r\pi}.$$

§. 235. Für den Keil sind die Bedingungen des Gleichgewichts dieselben, wie für drei in derselben Ebene wirkende Kräfte, welche auf einen materiellen Punkt wirken. Diese Aufgabe ist in §. 28 u. ff. behandelt.

§. 236. Aus diesen Beispielen erkennt man leicht, daß für alle Arten von Systemen die aus den gewöhnlichen Principien abgeleiteten Bedingungen des Gleichgewichts nicht von denen verschieden sind, welche aus der Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten sich ergeben. Jedoch läßt sich auch unabhängig von diesen besondern Beweisen der allgemeine Beweis führen, ohne daß man auf die Beschaffenheit des Systems Rücksicht nimmt, daß man in allen Fällen durch Gleichsetzung der Summe der virtuellen Momente der Kräfte $= 0$ vollständig die Bedingungen des Gleichgewichts ausdrückt.

In einem verschiedenen Kräften unterliegenden Systeme kann man jede Kraft durch ein an einem völlig biegsamen Faden hängendes Gewicht ersetzt denken, welcher über eine oder mehrere Rollen läuft und dessen Ende in dem Angriffspunkte der Kraft befestigt ist. Denken wir uns nun einen Hebel, welcher in einer Vertikalebene sich frei um eine horizontale Axe drehen kann; es möge zugleich das Gewicht, welches irgend eine der Kräfte P darstellt, die auf das System wirken, in die Ebene des Hebels hineingelegt sein, nachdem man die Entfernung AM (Fig. 30) so bestimmt hat, daß der Punkt M des Hebels bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Systems um den festen Punkt A denselben Raum δp durchläuft, welchen der Angriffspunkt der Kraft P auf der Richtung dieser Kraft zurücklegt: wenn man dies mit allen Kräften gethan hat; so ergiebt sich aus §. 10, daß man ohne die Bedingungen des Gleichgewichts für das System zu ändern den Hebel mit den die Gewichte P tragenden Fäden als unveränderlich verbunden oder nicht verbunden annehmen darf, und daß diese Gewichte sich nur dann in dem Systeme allein das Gleichgewicht halten können, wenn dies auch bei dem Hebel allein der Fall ist. Nun muß, wenn beim Hebel Gleichgewicht bestehen soll, die Summe der Producte $P.AM = 0$ sein; und statt der Halbmesser AM kann man die unendlich kleinen Bögen, welche die Punkte M gleichzeitig beschreiben, setzen, weil diese ihren zugehörigen Halbmessern proportional sind. Darum muß wirklich, wenn Gleichgewicht besteht, für eine beliebige unendlich kleine Verschiebung der Theile des Systems $S.P.\delta p = 0$ sein; folglich giebt man durch den

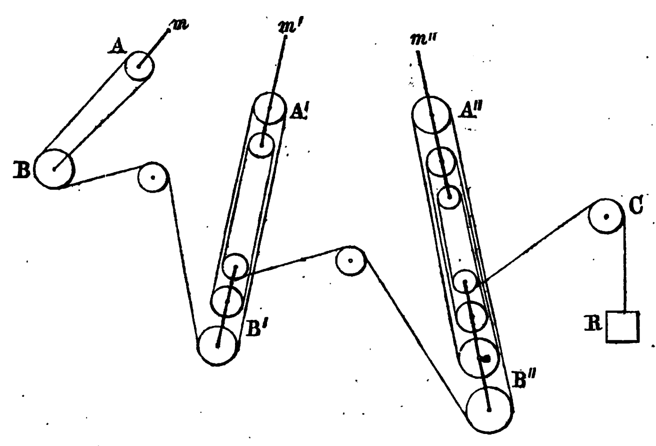
Fig. 30.



Nachweis, daß dies Verhältniß unter den Kräften des Systems besteht, in jedem Systeme ebenso wohl, wie beim Hebel, den Beweis, daß das Gleichgewicht besteht.

§. 237. Folgenden Beweis hat Lagrange gegeben. In Fig. 31 seien m, m', m'' ... die Angriffspunkte der Kräfte

Fig. 31.



P, P', P'' ... Man kann nun stets vermittels mehrerer beweglicher A, A', A'' ... und fester, B, B', B'' ... Flaschenzüge, welche nach Richtung dieser Kräfte wirken, dadurch, daß um alle ein einziger Faden herumläuft, die Wirkungen aller jener Kräfte durch die eines einzigen Gewichts R ersetzen, welches am Ende dieses Fadens befestigt ist. Nimmt man das Gewicht R als Einheit an; so sind die Größen P, P', P'' ... bezüglich gleich der Zahl der parallelen Seile, welche an jedem der in den Punkten m, m', m'' ... angebrachten beweglichen Flaschenzüge wirken. Wenn wir alsdann annehmen, daß das System im Gleichgewichtszustande, das Gewicht R also unbeweglich ist und im Systeme eine sehr kleine Verschiebung eintreten lassen,

so daß δp, $\delta p'$, $\delta p''$ ... die kraft dieser Verschiebung von den Punkten m, m', m'', ... auf der Richtung der auf sie wirkenden Kräfte durchlaufenen Räume sind; so durchläuft das Gewicht R offenbar den Raum

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \dots$$

Dieser Raum muß aber $= 0$ sein, wenn das System im Gleichgewichte ist. Wirklich kann er nicht positiv sein; denn wenn das Gewicht in Folge der gedachten Verschiebung sinkt; so kann es nicht mehr der Voraussetzung gemäß unbeweglich bleiben, weil es ja die Neigung zu sinken immer hat. Eben so wenig kann er negativ sein; denn wenn in einem Systeme eine Verschiebung möglich ist, so ist auch eine gleiche Beschiebung nach der entgegengesetzten Richtung möglich und wenn die Größe $P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p''$ ... für die eine Seite negativ ist, so ist sie für die andere positiv. Wenn folglich Gleichgewicht besteht, so ist diese Größe nothwendig $= 0$. Umgekehrt, wenn sie $= 0$ ist, muß, nach welcher Richtung hin man die unendlich kleine Verschiebung statthaben läßt, nothwendig das Gleichgewicht bestehen, weil die Punkte m, m', m'' ... eben so wenig streben nach der einen, als nach der entgegengesetzten Richtung sich zu bewegen.

Allgemeiner Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 238. Obgleich hiernach schon jeder Zweifel über die Allgemeinheit dieses Grundgesetzes schwinden muß, das in jedem besondern Falle unmittelbar die Bedingungen des Gleichgewichts ergiebt; so scheint es doch bei der Wichtigkeit des Princips angemessen zu sein es noch unter einem andern Gesichtspunkte zu betrachten, der geeigneter ist die Beschaffenheit desselben zu zeigen und es in seinem wahren Wesen darzustellen.

In einem beliebigen Systeme, das dem in §. 230 gegebenen Nachweis gemäß bestimmt ist, wollen wir allgemein die verschiedenen Angriffspunkte der Kräfte durch $m_1, m_2, m_3 \ldots$ bezeichnen, ebenso eine auf den Punkt m_1 wirkende Kraft durch P_1 und die Entfernung, welche dieser Punkt zu vergrößern strebt, durch p_1; P_2 sei eine der auf den Punkt m_2 wirkenden Kräfte und p_2 die Entfernung, welche diese Kraft zu vergrößern sucht u. s. f. Wir wollen zunächst annehmen, daß das System sich völlig frei im Raume verschieben läßt.

Es handelt sich darum die Bedingungen auszudrücken, unter denen die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ sich das Gleichgewicht halten. Wie nun auch die Punkte des Systems unter einander verbunden sein mögen, die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ können sich nicht einander aufheben, ohne daß die Stäbe oder Fäden, welche die Punkte des Systems verbinden und verhindern, daß sich die Entfernung je zweier Punkte ändert, nach ihren Richtungen zusammengedrückt oder ausgedehnt würden. Es können nun alle Verbindungen unter den Punkten des Systems oder nur ein Theil derselben, zusammengedrückt oder gespannt sein. Diesen Druck und diese Spannung wollen wir zum Unterschiede von den von außen auf das System wirkenden Kräften P_1, P_2, $P_3 \ldots$ innere Kräfte nennen. Eine dieser innern Kräfte, welche zwischen dem Punkte m_1 und einem andern Punkte des Systems wirken, wollen wir durch F_1, die Entfernung, welche diese Kraft zu vermehren strebt und die auf der Richtung der Verbindungslinie dieser beiden Punkte gemessen wird, durch f_1 bezeichnen; ebenso durch F_2 eine der innern zwischen dem Punkte m_2 und einem andern des Systems wirkenden Kräfte, durch f_2 die auf der Verbindungslinie dieser beiden Punkte gemessene Entfernung, welche die Kraft F_2 zu vergrößern strebt u. s. f.

Es kann alsdann das Gleichgewicht des ganzen Systems nur dann bestehen, wenn jeder der Punkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$ für sich unter Einwirkung der auf ihn wirkenden innern und äußern Kräfte im Gleichgewichte ist. Sobald also Gleichgewicht besteht, muß man gemäß §. 30 einzeln die Gleichungen haben

$$0 = S.P_1 \delta p_1 + S.F_1 \delta f_1,$$
$$0 = S.P_2 \delta p_2 + S.F_2 \delta f_2,$$
$$0 = S.P_3 \delta p_3 + S.F_3 \delta f_3,$$
u. s. w.

Man erhält dadurch ebenso viel Gleichungen, als im Systeme materielle Punkte vorhanden sind. Die Werthe der Variationen $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3 \ldots$ und $\delta f_1, \delta f_2, \delta f_3 \ldots$ in denselben können aus einer beliebigen mit jedem dieser Punkte vorgenommenen Verschiebung abgeleitet werden.

§. 239. Da jedoch der Annahme nach die Punkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$ ein System bilden; so können sie ihren Ort nur so verändern, wie es die Beschaffenheit der Verbindungen zwischen diesen Punkten erlaubt; dadurch ist die Freiheit jenen Variationen beliebige Werthe zu ertheilen beschränkt. Wenn man mit dieser Einschränkung den Variationen ihre Werthe zugeschrieben hat; so kann man behaupten, daß für jede unendlich kleine Gestaltänderung des Systems die den innern Kräften zugehörigen virtuellen Momente, wenn man alle Gleichungen des vorigen §. addiert, sich gegenseitig aufheben und völlig aus dem Resultate verschwinden. Daraus ergiebt sich die Gleichung

$$0 = S.P_1 \delta p + S.P_2 \delta p + S.P_3 \delta p + \ldots$$

oder einfacher

$$0 = S.P \delta p.$$

$P \delta p$ ist der allgemeine Ausdruck für das Moment irgend einer der von außen auf das System wirkenden Kräfte,

nämlich das Product aus der Kraft und dem unendlich kleinen Wege, den ihr Angriffspunkt auf ihrer Richtung zurückgelegt hat, wenn man in dem Systeme eine beliebige Aenderung der Gestalt eintreten läßt ohne die Art, wie die Punkte unter einander verbunden sind, zu verändern.

Um jenen Satz zu beweisen betrachten wir zwei der materiellen Punkte, m_1 und m_2 und nehmen an, daß zwischen ihnen ein unbiegsamer Stab liegt, welcher bewirkt, daß in ihrer gegenseitigen Entfernung keine Veränderung eintreten kann. Wenn nun das Gleichgewicht der äußern Kräfte P_1, P_2, P_3 ... erfordert, daß nach Richtung der Linie $m_1\ m_2$ ein Druck stattfindet; so muß dieses Drucks wegen eine längs $m_1\ m_2$ nach irgend einer Richtung hin wirkende Kraft F_1 in die dem Punkte m_1 zugehörige Gleichung aufgenommen werden. Außerdem muß aber in die den Punkt m_2 betreffende Gleichung eine Kraft F_2 eingeführt werden, welche gleich F_1 nach Richtung derselben Linie $m_1\ m_2$, aber nach der entgegengesetzten Seite hin wirkt. Offenbar sind demnach für jede mögliche Verschiebung der Punkte m_1 und m_2, sobald man eine unendlich kleine Aenderung der Gestalt im Systeme eintreten läßt, wenn nur die Art der Verbindung eine Veränderung in der Entfernung von $m_1\ m_2$ verhindert, die virtuellen Momente der beiden Kräfte F_1 und F_2 nothwendig gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet (man vernachlässigt eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung). Diese Momente müssen sich also, wenn die Gleichungen in §. 238 addiert werden, gegenseitig aufheben. Da dasselbe von allen innern Kräften gilt, die zwischen den Theilen des Systems wirken, daß sie nämlich stets einen doppelten unter sich gleichen, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Druck ergeben; so ist bewiesen, daß das Bestehen des Gleich=

gewichts in einem völlig freien Systeme die Gleichung $S.P\delta p = 0$ erfordert.

§. 240. Auch für ein nicht völlig freies System, in welchem einige Punkte fest sind oder sich auf gegebenen Flächen oder krummen Linien bewegen, läßt sich die Richtigkeit dieser Gleichung, wenn Gleichgewicht besteht, nachweisen. Denn man kann immer ohne das Gleichgewicht zu stören die Hindernisse, welche die Punkte zurückhalten, dadurch aus dem Systeme entfernen, daß man sie durch äußere Kräfte ersetzt, welche dem auf diese Hindernisse ausgeübten Druck gleich sind, und so das System zu einem völlig freien machen. Nun sind augenscheinlich für alle mit der Natur des Systems verträglichen Verschiebungen die virtuellen Momente dieser die Hindernisse ersetzenden äußern Kräfte $= 0$, weil die materiellen Punkte nach Richtung dieser Kräfte hin sich nicht verschieben lassen. So besteht also die Gleichung $S.P\delta p = 0$, ohne daß man jene Kräfte in dieselbe einzuführen braucht.

§. 241. Im Vorhergehenden ist bewiesen, daß in keinem Systeme Gleichgewicht bestehen kann, ohne daß die Gleichung $S.P\delta p = 0$ für alle Werthe der Variationen δp gilt, die sich mit der Art, wie die Angriffspunkte der äußern Kräfte P unter sich verbunden sind, vereinigen lassen. Ebenso müssen sich die Kräfte P in einem Systeme das Gleichgewicht halten, wenn sie jener Gleichung Genüge leisten. Wäre dies nämlich der Fall, ohne daß darum das Gleichgewicht bestände, so daß also unter Einwirkung der Kräfte P die Gestalt des Systems irgend wie sich änderte, wenn auch nur äußerst wenig; so könnte man offenbar die Aenderung der Gestalt verhindern und das System ins Gleichgewicht setzen, wenn man an jedem der Punkte m_1, m_2, $m_3 \ldots$ neue Kräfte Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots$ anbrächte, welche nach der entgegengesetzten Richtung wirken, wie die

von den materiellen Punkten durchlaufenen Wege δq_1, δq_2, $\delta q_3 \ldots$ Weil das System jetzt im Gleichgewichte ist, so hat man

$$S.P\delta p + S.Q\delta q = 0.$$

Dies reduciert sich auf

$$S.Q\delta q = 0,$$

da der Annahme nach der erste Ausdruck $= 0$ ist. Weil nun die Kräfte Q nach einer Richtung wirken, welche der entgegengesetzt ist, nach welcher sich die Punkte m bewegt haben um die Wege δq zu durchlaufen; so sind alle virtuellen Momente $Q\delta q$ negativ. Der Gleichung $S.Q\delta q$ läßt sich demnach nur dadurch Genüge leisten, daß jede der Kräfte Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots = 0$ gesetzt wird und hierin beruht der Beweis des Satzes.

Gebrauch des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten um die Bedingungen des Gleichgewichts in einem Systeme von Kräften zu finden.

§. 242. Wenn man die Punkte des Systems auf rechtwinklichte Coordinaten x, y, z bezogen hat, so daß also x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punkts m_1; x_2, y_2, z_2 die des Punkts m_2 u. s. f. sind: so läßt sich die Art, wie das System gebildet ist oder wie die Angriffspunkte der Kräfte unter sich verbunden sind, durch Gleichungen zwischen den Coordinaten der Punkte m_1, m_2, $m_3 \ldots$ ausdrücken. Soll z. B. die Entfernung der beiden Punkte stets den constanten Werth f behalten, so müssen die Coordinaten der Gleichung

$$f = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = 0$$

Genüge leisten.

Wenn der Punkt m_1 gezwungen ist sich auf einer gegebenen festen Fläche zu bewegen, so müssen seine

Coordinaten x_1, y_1, z_1 beständig der Gleichung dieser Fläche Genüge leisten; oder wenn dieser Punkt sich auf einer gegebenen festen Linie bewegen muß, so müssen sie beständig den beiden Gleichungen dieser Linie Genüge leisten.

Es müssen also die Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 ... beständig mehreren Gleichungen der Art

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \text{ u. s. f.}$$

Genüge leisten, welche die Art der Verbindungen zwischen den das System bildenden Punkten ausdrücken und in denen L, M, N beliebige Functionen der Coordinaten bezeichnen. Jedoch muß die Zahl der von einander verschiedenen Gleichungen von dieser Art kleiner sein, als das dreifache der Zahl der Punkte m_1, m_2, m_3 ...; wäre sie diesem Dreifachen nämlich gleich, so würden alle Coordinaten bestimmt und deshalb die Punkte des Systems fest im Raume sein.

§. 243. Jede der auf das System wirkenden Kräfte P läßt sich durch ihre drei Componierenden X, Y, Z nach Richtung der Axen x, y, z ersetzen. Wendet man auf sie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten an, d. h. setzt man die virtuellen Momente der Componierenden aller auf das System wirkender Kräfte $= 0$; so erhält man

$$S.X\delta x + S.Y\delta y + S.Z\delta z = 0 \qquad \text{(A)}$$

d. h. $X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1 + X_2\delta x_2 + Y_2\delta y_2 + \ldots = 0$.

In dieser Gleichung können die Variationen δx, δy, δz der Coordinaten jedes Punktes im Systeme nur solche Werthe annehmen, welche der Art, wie die Punkte unter sich verbunden sind, entsprechen. Sie müssen daher den Gleichungen Genüge leisten, welche man durch Differentiierung der Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$... in Beziehung auf die Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 ... erhält; wobei man das Differentiationszeichen mit dem Zeichen δ vertauscht. Die demnach aufgestellten Gleichungen

$$\delta L = 0, \quad \delta M = 0, \quad \delta N = 0 \ldots \qquad (B)$$

d. h. $\frac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dL}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dL}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dL}{dy_2}\delta y_2 + \ldots = 0$

$$\frac{dM}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dM}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dM}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dM}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dM}{dy_2}\delta y_2 + \ldots = 0$$

$$\frac{dN}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dN}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dN}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dN}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dN}{dy_2}\delta y_2 + \ldots = 0$$

muß man dann mit der Gleichung (A) verbinden, um so viele der Variationen δx_1, δy_1, δz_1; δx_2, δy_2, δz_2; $\delta x_3 \ldots$, als die Zahl der Bedingungsgleichungen erlaubt, daraus zu eliminieren. Da die nach dieser Eliminierung bleibenden Variationen völlig unbestimmt sind, so muß man jeden ihrer Coefficienten einzeln $= 0$ setzen. Die so erhaltenen Gleichungen drücken stets die Bedingungen aus, denen die Kräfte

$$X_1, \; Y_1, \; Z_1; \quad X_2, \; Y_2, \; Z_2; \quad X_3 \ldots$$

Genüge leisten müssen um sich im Systeme einander das Gleichgewicht zu halten.

§. 244. Man kann jene Endgleichungen auf zweifache Art finden. Entweder nämlich setzt man dem gewöhnlichen Proceß beim Eliminieren gemäß die aus den Gleichungen B gewonnenen Werthe der Variationen

$$\delta x_1, \; \delta y_1, \; \delta z_1; \quad \delta x_2, \; \delta y_2, \; \delta z_2; \quad \delta x_3 \ldots,$$

welche eliminiert werden sollen, in die Gleichung (A); oder man verfährt nach einer andern, der Multiplicationsmethode, so: Man multipliciert jede der Gleichungen (B) mit einem unbestimmten, constanten Factor und addiert sie dann zu Gleichung (A); die so neu gewonnene Gleichung ist die einzige, der man Genüge leisten muß. Sind λ, μ, $\nu \ldots$ jene Factoren, so bildet man die Gleichung

$$S.X\delta x + S.Y\delta y + S.Z\delta z + \lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N \ldots = 0 \quad (C)$$

Wenn man einzeln den Coefficienten jeder der Variationen δx_1, δy_1, δz_1; δx_2, δy_2, $\delta z_2 \ldots = 0$ setzt; so erhält man so viel Gleichungen, als Coordinaten der Punkte des Systems vorhanden sind. Aus diesen Gleichungen muß man die unbestimmten Coefficienten λ, μ, $\nu \ldots$ durch Eliminierung wegschaffen; die so gewonnenen Endgleichungen unterscheiden sich nicht von denen, die auf dem gewöhnlichen Wege des Eliminierens erhalten sind, wie man leicht ersieht. Uebrigens sind der Endgleichungen zusammen mit den Bedingungsgleichungen

$$L = 0, \ M = 0, \ N = 0 \ldots$$

stets so viele, als Coordinaten der Punkte des Systems vorhanden sind, so daß die Gestalt des Systems völlig bestimmt ist, wenn die Kräfte X, Y, Z gegeben sind und umgekehrt.

§. 245. An die voranstehende Bemerkung läßt sich eine wichtigere anknüpfen. Wenn man nach Aufstellung der Gleichung (C) einzeln die Coefficienten der Variationen

$$\delta x_1, \ \delta y_1, \ \delta z_1; \ \delta x_2, \ \delta y_2, \ \delta z_2; \ \delta x_3 \ldots$$

$= 0$ setzt; so verfährt man ebenso, als wenn jeder Punkt des Systems völlig frei wäre, aber außer den Kräften, die durch

$$X_1, \ Y_1, \ Z_1; \ X_2, \ Y_2, \ Z_2; \ X_3 \ldots$$

bezeichnet sind, auf jeden Punkt noch andere Kräfte wirkten, deren virtuelle Momente durch die Ausdrücke dargestellt werden, welche aus der Einführung der Größen $\lambda\delta L$, $\mu\delta M$, $\nu\delta N \ldots$ in jene Gleichung hineingebracht sind. Um dies deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, es enthielte die Gleichung $L = 0$ nur die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Punkt m_1. Es ist dann in Gleichung (C)

$$\lambda \delta L = \lambda \frac{dL}{dx_1} \delta x_1 + \lambda \frac{dL}{dy_1} \delta y_1 + \lambda \frac{dL}{dz_1} \delta z_1.$$

Man kann dies als die Summe der virtuellen Momente der drei Kräfte

$$\lambda \frac{dL}{dx_1}, \quad \lambda \frac{dL}{dy_1}, \quad \lambda \frac{dL}{dz_1},$$

ansehen, die auf den Punkt m_1 resp. nach Richtung der x_1, der y_1 und der z_1 wirken. Enthält etwa die Function L noch die Coordinaten x_2, y_2, z_2 des Punktes m_2; so kommt zu dem obigen Ausdruck für $\lambda\delta L$ in die Gleichung (C) noch die Größe hinzu

$$\lambda \frac{dL}{dx_2}\delta x_2 + \lambda \frac{dL}{dy_2}\delta y_2 + \lambda \frac{dL}{dz_2}\delta z_2,$$

also die Summe der virtuellen Momente der drei Kräfte

$$\lambda \frac{dL}{dx_2}, \quad \lambda \frac{dL}{dy_2}, \quad \lambda \frac{dL}{dz_2},$$

die man auf den Punkt m_2 resp. nach der Richtung der x_2, der y_2 und der z_2 wirkend denken kann u. s. w.

Die drei auf den Punkt m_1 nach Richtung der x_1, der y_1 und der z_1 wirkenden Kräfte

$$\lambda \frac{dL}{dx_1}, \quad \lambda \frac{dL}{dy_1}, \quad \lambda \frac{dL}{dz_1}$$

können als die drei Componierenden einer einzigen Kraft angesehen werden, deren Werth ist

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz_1}\right)^2},$$

deren Richtung mit der Normale zusammenfällt, die auf der durch die Gleichung $L = 0$ dargestellten Fläche errichtet ist, wenn man in dieser Gleichung die Coordinaten x_1, y_1, z_1, als die einzigen Veränderlichen betrachtet.

Ebenso dürfen die drei auf den Punkt m_2 wirkenden Kräfte

$$\lambda \frac{dL}{dx_2}, \quad \lambda \frac{dL}{dy_2}, \quad \lambda \frac{dL}{dz_2},$$

als die drei Componierenden einer einzigen Kraft angesehen werden, deren Werth ist

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy_2}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz_2}\right)^2},$$

deren Richtung mit der Richtung der Normale derjenigen Fläche zusammenfällt, welche durch die Gleichung $L = 0$ dargestellt wird, wenn man darin die Coordinaten x_2, y_2 und z_2 als die einzigen Veränderlichen ansieht. So kann man mit allen Gleichungen verfahren. Diese Kräfte stellen offenbar den Widerstand dar, welchen die Theile des Systems dem Drucke entgegensetzen, der die Punkte zu verschieben oder die Entfernungen zwischen ihnen zu ändern strebt. Aus diesem Grunde also darf man jeden Punkt des Systems als völlig frei ansehen, wenn man nur diese Kräfte in Betracht zieht.

Wir haben oben nachgewiesen, daß jede Gleichung $L = 0$ zwischen den Coordinaten der Punkte des Systems anzeigt, daß gewisse Verbindungen zwischen diesen Punkten bestehen. Diese Verbindungen tragen zum Gleichgewicht des Systems ebenso viel bei, als dies die den Axen parallel auf den Punkt m_1 wirkenden Kräfte

$$\lambda \frac{dL}{dx_1}, \quad \lambda \frac{dL}{dy_1}, \quad \lambda \frac{dL}{dz_1},$$

und die auf den Punkt m_2 ebenso wirkenden Kräfte

$$\lambda \frac{dL}{dx_2}, \quad \lambda \frac{dL}{dy_2}, \quad \lambda \frac{dL}{dz_2},$$

u. s. f. thun. Der Coefficient λ bleibt unbestimmt. Eine andere Bedingungsgleichung $M = 0$ zwischen denselben Coordinaten entspricht ebenso den auf den Punkt m_1 wirkenden Kräften

$$\mu \frac{dM}{dx_1}, \quad \mu \frac{dM}{dy_1}, \quad \mu \frac{dM}{dz_1}$$

und den auf den Punkt m_2 wirkenden Kräften

$$\mu \frac{dM}{dx_2}, \quad \mu \frac{dM}{dy_2}, \quad \mu \frac{dM}{dz_2} \text{ u. s. f.}$$

Der Coefficient μ bleibt gleichfalls unbestimmt. Ebenso ist es mit den übrigen Bestimmungsgleichungen.

§. 246. Durch die in §. 244 angegebene Methode bestimmt man die Bedingungen des Gleichgewichts völlig unabhängig von den Werthen, die etwa die unbestimmten Größen $\lambda, \mu, \nu \ldots$ annehmen könnten. Löst man umgekehrt die erhaltenen Gleichungen so auf, daß man aus ihnen die Werthe jener Größen bestimmt; so erkennt man damit den Druck, welchen die Theile des Systems erleiden. Die Gleichung (C) giebt nämlich ebenso viel verschiedene Gleichungen, als Coordinaten der Punkte des Systems vorhanden sind; die Zahl der Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0 \ldots$ ist ebenso groß, als die Zahl der unbestimmten Größen $\lambda, \mu, \nu \ldots$ Wenn man beide Arten von Gleichungen zusammen nimmt: so hat man stets gerade so viel Gleichungen, als nöthig sind die Coordinaten aller Punkte und die Größen $\lambda, \mu, \nu \ldots$ zu bestimmen, wenn die Kräfte gegeben sind; oder um die auf alle Punkte nach Richtung jeder Axe wirkenden Kräfte und die Größen $\lambda, \mu, \nu \ldots$ zu bestimmen, wenn die Gestalt des Systems gegeben ist.

§. 247. Zuweilen geben die Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0 \ldots$ nur unvollständig oder unvollkommen die Art der Verbindung des Systems an. Die Gleichung, welche ausdrücken soll, daß z. B. der Punkt m gezwungen ist auf einer gegebenen festen Fläche zu bleiben, sagt nur aus, daß der Punkt sich nach Richtung der Normale dieser Fläche nicht bewegen kann, weder nach der einen noch nach der andern Seite hin, sondern nur nach Richtung einer beliebigen in der Berührungsebene liegenden Linie verschiebbar ist; dabei ist es aber möglich, daß der Punkt

sich nach jeder Richtung hin, wenn er nur außerhalb des durch die Fläche begrenzten Körpers bleibt, zu bewegen die Freiheit hat. Eine Gleichung, wie sie oben gegeben ist, welche ausdrückt, daß die Entfernung zweier Punkte unveränderlich ist, paßt völlig in dem Falle, daß diese Punkte durch einen unbiegsamen und unausdehnbaren Stab verbunden sind; sind sie jedoch durch einen Faden verbunden, der nicht die Annäherung, nur die Vergrößerung der Entfernung beider Punkte verhindert; so drückt die Gleichung nicht völlig den Zustand des Systems aus. Es ergiebt sich hieraus, daß die Resultate, auf welche man durch die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten geführt wird, nicht immer ausreichen um vollständig die Bedingungen des Gleichgewichts auszudrücken; man muß deshalb nach den Vorzeichen, welche die Größen λ, μ, ν ... erhalten, prüfen, nach welcher Richtung hin der Druck wirkt, den die Verbindungen oder die festen Hindernisse, die im Systeme vorhanden sind, ertragen und ob es nach dieser Richtung hin wirklich den Widerstand giebt, der zum Gleichgewichte nöthig ist.

Beispiele für die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 248. Im Cap. II. haben wir durch Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten die Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer auf einen einzigen materiellen Punkt wirkender Kräfte aufgesucht; jetzt betrachten wir ein System materieller Punkte, welche unter einander unveränderlich verbunden sind und einen vollen Körper bilden. In diesem Falle muß man in der allgemeinen Gleichung (A) des §. 243

$$S.X\delta x + S.Y\delta y + S.Z\delta z = 0$$

die Variationen δx, δy und δz der Bedingung gemäß bestimmen, daß bei jeder Verschiebung des Körpers die materiellen Punkte sämmtlich ihre Lage gegen einander und ihre Entfernungen von einander beibehalten sollen.

Um die Gleichungen des Gleichwichts aufzustellen, beziehen wir die Punkte des Körpers auf ein neues System rechtwinklichter Coordinaten x', y', z'. Dann ist

$$x = \alpha + ax' + by' + cz',$$
$$y = \beta + a'x' + b'y' + c'z',$$
$$z = \gamma + a''x' + b''y' + c''z',$$

indem man die Coordinaten des neuen Anfangspunkts durch α, β, γ bezeichnet und setzt

$$a = \cos.\widehat{xx'},\quad b = \cos.\widehat{xy'},\quad c = \cos.\widehat{xz'};$$
$$a' = \cos.\widehat{yx'},\quad b' = \cos.\widehat{yy'},\quad c' = \cos.\widehat{yz'};$$
$$a'' = \cos.\widehat{zx'},\quad b'' = \cos.\widehat{zy'},\quad c'' = \cos.\widehat{zz'}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Beziehungen

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,\quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,\quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$
$$ab + a'b' + a''b'' = 0,\quad ac + a'c' \mp a''c'' = 0,\quad bc \mp b'c' + b''c'' = 0,$$

welche drei der Größen a, b, c ... unbestimmt lassen. Wenn man die Axen der x', y' z' mit dem gegebenen Systeme, dem vollen Körper, vereinigt denkt; so wird die Lage dieser Axen x', y', z' durch eine beliebige Verschiebung des Systems geändert; die Coordinaten x', y', z' selbst ändern sich nicht, wohl aber die Coordinaten x, y, z. Bei der Differentiierung der obigen Gleichungen kann man deshalb x' y' z' als constant annehmen, so daß man folgende Formeln erhält, wenn man die Differentiale mit dem Zeichen δ bezeichnet:

$$\delta x = \delta\alpha + x'\delta a + y'\delta b + z'\delta c,$$
$$\delta y = \delta\beta + x'\delta a' + y'\delta b' + z'\delta c',$$
$$\delta z = \delta\gamma + x'\delta a'' + y'\delta b'' + z'\delta c''.$$

Nehmen wir nun an, daß vor der Verschiebung die Axen der x', y' und z' mit denen der x, y und z zusammenfallen; so ist $x = x'$, $y = y'$ und $z = z'$, folglich $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; $a' = 0$, $b' = 1$, $c' = 0$; $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$. Dann können wir setzen

$$\delta x = \delta\alpha + x\delta a + y\delta b + z\delta c,$$
$$\delta y = \delta\beta + x\delta a' + y\delta b' + z\delta c',$$
$$\delta z = \delta\gamma + x\delta a'' + y\delta b'' + z\delta c'';$$

und da man der voranstehenden Werthe halber durch Differentiierung der Bedingungsgleichungen erhält: $\delta a = 0$, $\delta b' = 0$, $\delta c'' = 0$; $\delta b + \delta a' = 0$, $\delta c + \delta a'' = 0$, $\delta c' + \delta b'' = 0$; verwandeln sich diese Gleichungen in folgende

$$\delta x = \delta\alpha + y\delta b - z\delta a'',$$
$$\delta y = \delta\beta - x\delta b + z\delta c',$$
$$\delta z = \delta\gamma + x\delta a'' - y\delta c';$$

hierin sind die Größen $\delta a''$, δb und $\delta c'$ völlig willkührlich. Statt dieser Ausdrücke dürfen wir auch schreiben

$$\delta x = \delta\alpha + y\delta\psi - z\delta\omega,$$
$$\delta y = \delta\beta - x\delta\psi + z\delta\varphi,$$
$$\delta z = \delta\gamma + x\delta\omega - y\delta\varphi,$$

wenn man durch $\delta\varphi$, $\delta\omega$ und $\delta\psi$ drei beliebige unendlich kleine Winkel bezeichnet. Daß man statt $\delta c'$, δb und $\delta a''$ diese Winkel setzt, beruht auf folgendem Grunde. Wenn anfangs die Axen der x', y' und z' mit denen der x, y und z zusammenfielen und alsdann um ein unendlich kleines Stück verschoben werden, so ist $\delta c'$ der Cosinus des Winkels,

welcher zwischen der Axe der y und der der z' liegt. Der Werth dieses Cosinus ist dem des Winkels gleich, den das System um die Axe der x beschreibt. Ebenso ist $\delta a''$ der Cosinus des zwischen der Axe der z und der der x' liegenden Winkels und sein Werth ist gleich dem des Winkels, welchen das System um die Axe der y beschreibt; δb endlich ist der Cosinus des zwischen der Axe der x' und der der y' liegenden Winkels und der Werth desselben ist dem des Winkels gleich, den das System um die Axe der z beschrieben hat. Die unendlich kleinen Winkel $\delta\varphi$, $\delta\omega$ und $\delta\psi$ bezeichnen demnach in den voranstehenden Formeln die Winkel, welche das System um die Axen der x, y und z beschrieben hat. Diese Winkel sind positiv zu nehmen, wenn in der durch die positiven Theile der Axen gebildeten körperlichen Ecke die Drehung von x nach z, von z nach y, von y nach x geschieht.

Es ergiebt sich hieraus, daß man eine willkührliche unendlich kleine Verschiebung der Punkte eines vollen Körpers dadurch darstellt, daß man alle diese Punkte nach Richtung der drei Coordinatenaxen um die Größen $\delta\alpha$, $\delta\beta$ und $\delta\gamma$ verschiebt und diese Punkte zugleich von den Axen um die Winkel $\delta\varphi$, $\delta\omega$ und $\delta\psi$ entfernt. Die Werthe der Größen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ und $\delta\varphi$, $\delta\omega$ und $\delta\psi$ sind völlig willkührlich und allen Punkten des Körpers gemeinsam. Die obigen Gleichungen drücken die Variationen aus, welche unter Einwirkung dieser Bewegungen den Coordinaten jedes Punkts ertheilt werden.

Wenn man nun in die gleich im Anfange dieses §. gegebene Gleichung, die aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten hergeleitet ist, die obigen Werthe für δx, δy und δz hineinsetzt, so erhält man

$$S.X(\delta\alpha + y\delta\psi - z\delta\omega) + S.Y(\delta\beta - x\delta\psi + z\delta\varphi) \\ + S.Z(\delta\gamma + x\delta\omega - y\delta\varphi) = 0.$$

Weil die Werthe der Größen α, β u. s. w. von einander unabhängig sind, folgt

$$S.X=0,\quad S.(Xy-Yx)=0,$$
$$S.Y=0,\quad S.(Yz-Zy)=0,$$
$$S.Z=0,\quad S.(Zx-Xz)=0.$$

Diese Gleichungen enthalten, wie schon §. 54 bewiesen ist, vollständig die Bedingungen des Gleichgewichts eines vollen Körpers.

§. 249. Für die Verschiebung eines beliebigen Punkts in einem vollen Körper haben wir oben die Formeln gefunden

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= y\delta\psi - z\delta\omega\\ \delta y &= z\delta\varphi - x\delta\psi\\ \delta z &= x\delta\omega - y\delta\varphi\end{aligned}\right\}\text{(m)}$$

und haben dieselben auf drei Drehungen um die Axen der x, y und z zurückgeführt. Es ist aber wichtig zu beachten, daß man diese Formeln auch aus einer einzigen Drehung um eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgehende Linie ableiten kann. Denn 1) wenn man setzt $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$, d. h.

$$y\delta\psi - z\delta\omega=0,\quad z\delta\varphi - x\delta\psi=0,\quad x\delta\omega - y\delta\varphi=0,$$

oder auch

$$\frac{x}{\delta\varphi}=\frac{y}{\delta\omega}=\frac{z}{\delta\psi};$$

so gehören die diesen Gleichungen Genüge leistenden Coordinaten einer geraden Linie an, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht und mit den Axen der x, y und z Winkel bildet, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2}},\quad \frac{\delta\omega}{\sqrt{\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2}},\quad \frac{\delta\psi}{\sqrt{\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2}}.$$

Es sind folglich die auf dieser geraden Linie (die wir Rotationsaxe nennen wollen) liegenden Punkte unbewegt geblieben.

2. Alle übrigen Punkte des Körpers müssen sich um diese Rotationsaxe gedreht haben. Denn sobald eine solche Drehung stattgefunden hat, muß der unendlich kleine Bogen, welchen einer dieser Punkte beschrieben hat und dessen Projectionen auf den Axen δx, δy und δz sind, 1⁰ senkrecht auf der Rotationsaxe stehen, was ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$\delta\varphi . \delta x + \delta\omega . \delta y + \delta\psi . \delta z = 0;$$

2⁰ senkrecht stehen auf der von diesem Punkte nach dem Anfangspunkte der Coordinaten gezogenen Linie; deshalb muß der Gleichung

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0$$

Genüge geleistet werden können. Die Ausdrücke (m) für δx, δy und δz leisten aber wirklich diesen beiden Gleichungen Genüge.

Den Winkel $\delta\theta$, den alle Punkte des Körpers um die Rotationsaxe beschrieben haben, erhält man so. Der von einem beliebigen Punkte durchlaufene Raum ist $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; oder wenn man statt δx, δy, δz die Werthe (m) substituiert

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2) - (x\delta\varphi+y\delta\omega+z\delta\psi)^2}.$$

Liegt nun der Punkt in einer gegen die Rotationsaxe senkrechten Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, so wird der zweite Theil der Größe unter dem Wurzelzeichen $= 0$ und $x^2 + y^2 + z^2$ ist der Halbmesser des beschriebenen Bogens. Also ist

$$\delta\theta = \sqrt{\delta\varphi^2 + \delta\omega^2 + \delta\psi^2}.$$

So lassen sich die Rotationsbewegungen um verschiedene Axen nach denselben Gesetzen, wie die geradlinigen Bewegungen componieren und zerlegen. Die Axe der Rotation $\delta\theta$ ist die Diagonale des rechtwinklichten Parallelepipedums, das aus drei den componierenden Rotationen $\delta\varphi$, $\delta\omega$ und $\delta\psi$ proportionalen Linien construiert ist und die resultierende Rotation selbst ist dieser Diagonale proportional.

§. 250. Wir wollen jetzt das Gleichgewicht des in §. 213 u. ff. besprochenen Seilpolygons zu bestimmen suchen. Die Bestimmungsgleichungen sind hier, mit Beibehaltung der in §. 213 gewählten Bezeichnungen

$$f_0 = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2},$$
$$f_1 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+_1(z_2-z_1)^2},$$
$$f_2 = \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2},$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f_n = \sqrt{x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2+(z_{n+1}-z_n)^2}.$$

Die Gleichung (A) in §. 243 geht hier über in

$$0 = T_0\cos.a_0\delta x_0+P_1\cos.\alpha_1\delta x_1+P_2\cos.\alpha_2\delta x_2+\ldots+T_n\cos.a_n\delta x_{n+1}$$
$$+T_0\cos.b_0\delta y_0+P_1\cos.\beta_1\delta y_1+P_2\cos.\beta_2\delta y_2+\ldots+T_n\cos.b_n\delta y_{n+1}$$
$$+T_0\cos.c_0\delta z_0+P_1\cos.\gamma_1\delta z_1+P_2\cos.\gamma_2\delta z_2+\ldots+T_n\cos.c_n\delta z_{n+1}.$$

Wenn man die voranstehenden Bedingungsgleichungen differentiiert und die Differentiale mit dem Zeichen δ bezeichnet, so erhält man

$$0=\frac{(x_1-x_0)(\delta x_1-\delta x_0)+(y_1-y_0)(\delta y_1-\delta y_0)+(z_1-z_0)(\delta z_1-\delta z_0)}{f_0},$$
$$0=\frac{(x_2-x_1)(\delta x_2-\delta x_1)+(y_2-y_1)(\delta y_2-\delta y_1)+(z_2-z_1)(\delta z_2-\delta z_1)}{f_1},$$
$$0=\frac{(x_3-x_2)(\delta x_3-\delta x_2)+(y_3-y_2)(\delta y_3-\delta y_2)+(z_3-z_2)(\delta z_3-\delta z_2)}{f_2},$$
$$\vdots$$
$$0=\frac{(x_{n+1}-x_n)(\delta x_{n+1}-\delta x_n)+(y_{n+1}-y_n)(\delta y_{n+1}-\delta y_n)+(z_{n+1}-z_n)(\delta z_{n+1}-\delta z_n)}{f_n}.$$

Addiert man nun nach der in §. 244 gegebenen Anweisung diese Gleichungen zur vorangehenden Gleichung, nachdem sie bezüglich mit den unbestimmten Coefficienten λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$ multipliciert sind und setzt alsdann einzeln die Ausdrücke, welche die Variationen δx_0, δy_0, δz_0; δx_1, δy_1, δz_1; $\delta x_2 \ldots$ enthalten, $= 0$, so erhält man folgende Gleichungen als Ausdruck für die Bedingungen des Gleichgewichts

Für den Punkt m_0
$$\begin{cases} 0 = T_0 \cos. a_0 - \lambda_0 \dfrac{x_1 - x_0}{f_0}, \\ 0 = T_0 \cos. b_0 - \lambda_0 \dfrac{y_1 - y_0}{f_0}, \\ 0 = T_0 \cos. c_0 - \lambda_0 \dfrac{z_1 - z_0}{f_0}; \end{cases}$$

Für den Punkt m_1
$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 \dfrac{x_1 - x_0}{f_0} + P_1 \cos. \alpha_1 - \lambda_1 \dfrac{x_2 - x_1}{f_1}, \\ 0 = \lambda_0 \dfrac{y_1 - y_0}{f_0} + P_1 \cos. \beta_1 - \lambda_1 \dfrac{y_2 - y_1}{f_1}, \\ 0 = \lambda_0 \dfrac{z_1 - z_0}{f_0} + P_1 \cos. \gamma_1 - \lambda_1 \dfrac{z_2 - z_1}{f_1}; \end{cases}$$

Für den Punkt m_2
$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 \dfrac{x_2 - x_1}{f_1} + P_2 \cos. \alpha_2 - \lambda_2 \dfrac{x_3 - x_2}{f_2}, \\ 0 = \lambda_1 \dfrac{y_2 - y_1}{f_1} + P_2 \cos. \beta_2 - \lambda_2 \dfrac{y_3 - y_2}{f_2}, \\ 0 = \lambda_1 \dfrac{z_2 - z_1}{f_1} + P_2 \cos. \gamma_2 - \lambda_2 \dfrac{z_3 - z_2}{f_2}, \end{cases}$$

u. s. f.

Für den Punkt m_n
$$\begin{cases} 0 = \lambda_n \dfrac{x_{n+1} - x_n}{f_n} + T_n \cos. a_n, \\ 0 = \lambda_n \dfrac{y_{n+1} - y_n}{f_n} + T_n \cos. b_n, \\ 0 = \lambda_n \dfrac{z_{n+1} - z_n}{f_n} + T_n \cos. c_n. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stimmen offenbar mit den in §. 213 und §. 214 gegebenen. Die Coefficienten λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$ stellen nach §. 245 die von den verschiedenen Polygonseilen erlittenen Spannungen dar. Die erste und die letzte der vorangehenden Gleichungen zeigen an, daß die auf die Endpunkte wirkenden Kräfte nach Richtung der letzten Seiten wirken und der Spannung dieser Seiten gleich sein müssen. Aus den andern Gleichungen folgt, daß die auf jeden Eckpunkt des Polygons wirkende Kraft gleich und direct entgegengesetzt den Spannungen der benachbarten Seiten sein muß.

§. 251. Wir wollen endlich mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichungen der Seilcurve entwickeln, welche in §. 218 und ff. behandelt ist. Zugleich mag die Lösung dieser Aufgabe als Beispiel dienen, wie man die Methode der Variationen auf mechanische Probleme anwendet.

Behält man die in §. 218 gewählten Bezeichnungen bei; so ist folgende die Gleichung, welche ausdrückt, daß die Summe der virtuellen Momente aller auf den Faden wirkender Kräfte $= 0$ ist

$$\begin{aligned} 0 = & T_0 \cos. a_0 \delta x_0 + T_0 \cos. b_0 \delta y_0 + T_0 \cos. c_0 \delta z_0 \\ & + T_\omega \cos. a_\omega \delta x_\omega + T_\omega \cos. b_\omega \delta y_\omega + T_\omega \cos. c_\omega \delta z_\omega \\ & + \int_{s_0}^{s_\omega} ds (p \cos. \alpha \delta x + p \cos. \beta \delta y + p \cos. \gamma \delta z). \end{aligned}$$

Das System ist der einzigen Bedingung unterworfen, daß die Länge des Elements ds des Fadens unveränderlich ist; für jedes derselben gilt also die Gleichung

$$ds = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \delta ds = 0.$$

Da wir nach Anleitung des §. 244 jede dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicieren und

dann alle zu der vorhergehenden Gleichung addieren müssen; so haben wir hier offenbar das Integral $\int_{s_0}^{s_\omega} \lambda . \delta ds$ zu addieren, worin λ eine mit s veränderliche Größe ist, die einen unbestimmten Werth annehmen kann. Man drückt folglich der Gleichung (C) in §. 244 analog die Bedingungen des Gleichgewichts aus durch die Gleichung

$$0 = T_0 \cos . a_0 \delta x_0 + T_0 \cos . b_0 \delta y_0 + T_0 \cos . c_0 \delta z_0$$
$$+ T_\omega \cos . a_\omega \delta x_\omega + T_\omega \cos . b_\omega \delta y_\omega + T_\omega \cos . c_\omega \delta z_\omega$$
$$+ \int_{s_0}^{s_\omega} ds (p \cos . \alpha \delta x + p \cos . \beta \delta y + p \cos . \gamma \delta z) + \int_{s_0}^{s_\omega} \lambda \delta ds.$$

Diese Gleichung muß für alle Werthe gültig sein, die man den Variationen der Coordinaten der verschiedenen Punkte der Curve ertheilen mag. Sie ist den Gleichungen ganz ähnlich, auf welche man bei Lösung der Aufgaben die Maxima und Minima der bestimmten Integrale zu suchen geführt wird und läßt sich ebenso behandeln.

Da

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

so ist

$$\delta ds = \frac{dx . \delta dx + dy . \delta dy + dz . \delta dz}{ds},$$

folglich

$$\int_{s_0}^{s_\omega} \lambda \delta ds = \int_{s_0}^{s_\omega} ds . \lambda \left[\frac{dx}{ds} . \frac{\delta dx}{ds} + \frac{dy}{ds} . \frac{\delta dy}{ds} + \frac{dz}{ds} . \frac{\delta dz}{ds} \right].$$

Wenn man die Ordnung der Zeichen d und δ ändert und durch Integration durch Theile die Differentiale der Variationen zum Verschwinden bringt, so erhält man

$$\int_{s_0}^{s_\omega} \lambda\delta ds = -\lambda_0\left[\frac{dx_0}{ds_0}\delta x_0 + \frac{dy_0}{ds_0}\delta y_0 + \frac{dz_0}{ds_0}\delta z_0\right]$$

$$+ \lambda_\omega\left[\frac{dx_\omega}{ds_\omega}\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{ds_\omega}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{ds_\omega}\delta z_\omega\right]$$

$$-\int_{s_0}^{s_\omega} ds\left[\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)\delta x + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)\delta y + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right].$$

Dieser Werth muß in die obige Gleichung substituiert werden.

Wenn man nach Ausführung dieser Substitution einzeln die Ausdrücke, welche die von einander völlig unabhängigen Variationen der Coordinaten enthalten, $= 0$ setzt, so erhält man: 1^0 für den ersten und den letzten Punkt der Curve die bestimmten Gleichungen

$$0 = T_0 \cos. a_0 - \lambda_0 \frac{dx_0}{ds_0},$$

$$0 = T_0 \cos. b_0 - \lambda_0 \frac{dy_0}{ds_0},$$

$$0 = T_0 \cos. c_0 - \lambda_0 \frac{dz_0}{ds_0};$$

$$0 = T_\omega \cos. a_\omega - \lambda_\omega \frac{dx_\omega}{ds_\omega},$$

$$0 = T_\omega \cos. b_\omega + \lambda_\omega \frac{dy_\omega}{ds_\omega},$$

$$0 = T_\omega \cos. c_\omega + \lambda_\omega \frac{dz_\omega}{ds_\omega}.$$

Es ergiebt sich daraus, daß die auf die Endpunkte wirkenden Kräfte nach Richtung der letzten Elemente wirken und der in diesen Elementen statthabenden Spannung gleich und entgegengesetzt sind. Die Spannung wird den ganzen Verlauf der Curve hindurch durch den Werth der Größe λ dargestellt.

2°. Für alle Punkte in der Curve erhält man die folgenden unbestimmten Gleichungen, wenn man einzeln die Coefficienten der δx, δy und δz, die unter dem Integrationszeichen geblieben sind, $= 0$ setzt:

$$p \cos.\alpha - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$p \cos.\beta - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$p \cos.\gamma - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Diese letzten Gleichungen stimmen mit den in §. 220 gefundenen überein. Die Integration derselben ergiebt Gleichungen, die mit den in §. 218 gegebenen übereinstimmen.

Allgemeine Bemerkung.

§. 252. Es kann auffallend erscheinen, daß die Methode, die man anwendet um die Bedingungen des Gleichgewichts eines Kräftesystems zu bestimmen, mit der Methode, durch die man Aufgaben über Maxima und Minima auflöst, so viel Aehnlichkeit haben. Um dies zu erklären, bemerke man, daß in der Gleichung

$S.P\delta p = 0$ oder $P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + \ldots = 0$, welche im allgemeinen die Bedingungen des Gleichgewichts ausdrückt, die linke Seite bei praktischen Anwendungen meist als die Variation einer gewissen Function Π der Veränderlichen p_1, p_2, $p_3 \ldots$ angesehen werden darf, so daß demnach

$$\delta\Pi = P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + \ldots$$

Folglich drückt die obige Gleichung den Zustand des Maximums oder Minimums der Function Π aus. Man kann also keine Aufgabe über das Gleichgewicht auflösen, ohne zugleich eine Maximum- oder Minimum-Aufgabe zu lösen.

Wenn übrigens die Variationen δp_1, δp_2, $\delta p_3 \ldots$ gewissen Bedingungen unterworfen sind, so muß man natürlich darauf Rücksicht nehmen. Die Art, wie man dabei zu verfahren hat, ist in II. §. 512 und ff. des Lehrb. der Diff. Rechn. dargestellt und das dort angegebene Verfahren ist völlig dem oben angewandten gleich.

§. 253. Wir wollen den besondern Fall besprechen, daß alle auf das System wirkenden Kräfte vertical und constant sind, daß demnach das System aus schweren auf beliebige Weise mit einander verbundenen Körpern gebildet ist, ohne daß eine fremde Kraft auf dasselbe einwirkt. Alsdann sind die Linien p_1, p_2, $p_3 \ldots$ sämmtlich parallel, P_1, P_2, $P_3 \ldots$ sind constant; folglich ist

$$\Pi = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots$$

Die Linien p_1, p_2, $p_3 \ldots$ können von beliebigen auf den Richtungen der Kräfte liegenden Punkten aus gezählt werden. Liegen die obern Endpunkte aller dieser Linien in der nämlichen horizontalen Ebene, so drückt jene Größe, durch die constante Größe $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ dividiert, also die Function

$$\frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots}$$

die Entfernung des Schwerpunkts der Körper des Systems von jener horizontalen Ebene aus. Man sieht also, daß das System im Gleichgewichtszustande sich befindet, wenn der Schwerpunkt der das System bildenden Körper so hoch oder so tief als möglich liegt. Wir werden späterhin auf die Dynamik bezügliche Entwickelungen geben, welche die Erweiterung und Vervollständigung dieser Sätze enthalten.

XVII. Allgemeine Gleichung der Bewegung eines Systems von materiellen Punkten, auf das beliebige Kräfte wirken. D'Alemberts Princip.

§. 254. Wir haben in Cap. VIII die allgemeinen Bedingungen der Bewegung eines völlig freien materiellen Punkts, auf den mehrere Kräfte einwirken, gegeben, ebenso in Cap. IX für den Fall, daß der Punkt sich auf einer gegebenen Fläche oder Curve bewegen muß. Hier sollen die allgemeinen Bedingungen der Bewegung eines Systems von beliebig mit einander verbundenen materiellen Punkten entwickelt werden. Wie ein System gebildet ist, haben wir in §. 229 und 230 dargestellt; zugleich muß festgehalten werden, daß bei den Kräften die Einwirkung stetig ist, wie bei der Schwerkraft.

Folgendes ist das Gesetz der Bewegung eines freien materiellen Punkts: die Größe der Bewegung, welche der Körper in der Zeiteinheit nach Richtung der auf ihn wirkenden Kraft erlangt hat, ist beständig gleich dem Drucke, welchen die Kraft auf den Körper ausübt.

Völlig dasselbe Gesetz gilt auch für die Bewegung eines materiellen Punkts, der gezwungen ist sich auf einer gegebenen Curve oder Fläche zu bewegen, wie in Cap. VIII bewiesen ist, wenn wir nur in die allgemeinen Gleichungen, welche diese Bedingungen ausdrücken, die Kraft aufnehmen, welche der Druck, durch den der materielle Punkt auf der Linie oder Fläche zurückgehalten wird, darstellt. Aus diesen allgemeinen Gleichungen kann man die Bewegung des materiellen Punkts und diesen Druck bestimmen.

§. 255. Wenn ein System von beliebig mit einander verbundenen materiellen Punkten vorliegt, die sich bewegen und auf welche Kräfte einwirken; so erlaubt offenbar die

zwischen diesen Punkten statthabende Verbindung im allgemeinen nicht, daß sie frei der Einwirkung der auf sie wirkenden Kräfte nachgeben und man kann demnach gewöhnlich nicht die Gesetze ihrer Bewegung unmittelbar aus denen ableiten, die für die Bewegung eines einzigen materiellen Punkts aufgestellt sind. Augenscheinlich treten zwischen allen oder einigen Punkten des Systems, wenn man je zwei zusammennimmt, innere Einwirkungen ein, welche die Bewegung derselben modificieren. Die Bewegung eines beliebigen der materiellen Punkte für sich betrachtet, geht hervor 1° aus seiner Anfangsgeschwindigkeit, 2° aus der auf ihn einwirkenden äußern Kraft, 3° aus den innern Einwirkungen, die zwischen diesem Punkte und den übrigen des Systems hervorgebracht werden; diese Einwirkungen hängen widerum von der Art ab, wie die materiellen Punkte des Systems unter einander verbunden sind. Wenn man aber auf diese innern Kräfte Rücksicht nimmt; so darf man auf die Bewegung jedes der Punkte des Systems völlig die Gesetze für die Bewegung eines völlig freien materiellen Punkts anwenden.

Indem wir demnach bezeichnen

durch m die Masse eines der materiellen Punkte;

durch x, y, z die drei rechtwinkligten Coordinaten des Punkts, in welchem der materielle Punkt am Ende der Zeit t liegt;

durch X, Y, Z den in Gewichtseinheiten gegebenen Druck, den die auf ihn einwirkenden äußern Kräfte nach Richtung der Axen der x, y und z auf ihn ausüben;

durch E, F, G den gleichfalls in Gewichtseinheiten gegebenen Druck, den die innern Kräfte, die zwischen dem Punkte m und den übrigen eintreten, nach Richtung jener Axen auf ihn ausüben:

so gelten nach §. 141 für die Bewegung jedes Punkts im System die Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + E,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + F,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + G.$$

Wenn wir nun dem Systeme am Ende der Zeit t eine beliebige unendlich kleine Bewegung ertheilen ohne die Art, wie die materiellen Punkte unter einander verbunden sind, zu verändern; so durchläuft der materielle Punkt nach Richtung der x, y und z resp. die Wege δx, δy und δz. Multiplicieren wir also die erste der voranstehenden Gleichungen mit δx, die zweite mit δy, die dritte mit δz und addieren alle neu erhaltenen Gleichungen, so finden wir

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = S.(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

worin das Zeichen S bedeutet, daß man die auf die Zeichen folgenden Größen für alle Punkte des Systems addieren soll. Die Summe $S.(E\delta x + F\delta y + G\delta z)$ der Summe der virtuellen Momente der innern Kräfte ist dabei, wie §. 239 bewiesen ist, nothwendig $= 0$.

Wenn das System nicht völlig frei ist, sondern einige der Punkte gezwungen sind auf gegebenen festen Linien oder Flächen sich zu bewegen; so werden durch den Widerstand dieser Flächen oder Linien neue Kräfte eingeführt, deren virtuelle Momente jedoch stets $= 0$ sind, wie in §. 240 nachgewiesen ist. Die obige Gleichung gilt darum auch für diesen Fall.

§. 256. Diese Gleichung drückt die allgemeinen Bedingungen der Bewegung des Systems aus; wenn man sie zu den Bedingungsgleichungen hinzunimmt, welche die

Art der Verbindung der materiellen Punkte unter einander bestimmen; so hat man alles, was man braucht, um die Bewegung aller Punkte des Systems zu bestimmen. Die Variationen müssen jenen Gleichungen Genüge leisten und sind keiner andern Bedingung unterworfen. Sie stellen beliebige unendlich kleine Wege dar, welche von den Punkten des Systems durchlaufen werden können, wenn man in der Gestalt desselben, die es am Ende der Zeit t hatte, eine geringe Aenderung eintreten läßt. Die Größen δx, δy und δz dürfen im allgemeinen nicht mit denen verwechselt werden, die durch dx, dy, dz bezeichnet sind und die Wege darstellen, welche die Punkte des Systems in dem der Zeit t folgenden Augenblicke dt vermöge der dem System gerade ertheilten Bewegung durchlaufen. Möglicherweise könnte die Art der Verbindung der materiellen Punkte unter einander verbieten, statt δx, δy, δz in die Gleichung dx, dy, dz zu substituieren.

§. 257. Die Gleichung

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

auf welche wir in §. 255 direct geführt sind, drückt eigentlich aus, daß in dem gegebenen Systeme einerseits die Kräfte $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$, welche die von den materiellen Punkten wirklich angestrebte Bewegung hervorbringen würden, wenn dieselben ihnen frei nachgeben könnten; andererseits die von außen auf das System wirkenden Kräfte, nach der entgegengesetzten Richtung genommen, sich das Gleichgewicht halten müssen. In der That läßt sich beweisen, daß die Bewegung des Systems stets so beschaffen sein muß, daß diese Bedingung beständig erfüllt wird.

Betrachten wir nämlich eine der von außen auf das System wirkenden Kräfte; so würde der materielle Punkt,

auf den diese Kraft wirkt, wenn er frei wäre, die Bewegung annehmen, welche sie ihm dem in §. 254 wiederholten Gesetze gemäß zu ertheilen strebt; aber die Verbindung der Theile des Systems unter einander zwingt jenen Punkt gewöhnlich eine andere Bewegung anzunehmen. Man kann nun die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft in zwei andere Kräfte zerlegen, deren eine diesem Punkte die Bewegung, welche er wirklich annimmt, ertheilen würde, wenn er frei wäre; offenbar veranlaßt diese erste Componierende allein die Bewegung des Punktes und die zweite Componierende wird durch die zwischen den Theilen des Systems eintretenden innern Kräfte aufgehoben. Die erste Componierende ist die bewahrte, die zweite die verlorene Kraft des materiellen Punkts. Folglich wird dem System eine solche Bewegung ertheilt, daß die verlorenen Kräfte sich gegenseitig aufheben oder kraft der Verbindung der materiellen Punkte unter einander sich beständig das Gleichgewicht halten müssen. Dies ist D'Alemberts Princip.

Wir haben oben die nach Richtung der drei Axen auf das System wirkenden äußern Kräfte durch X, Y, Z bezeichnet; die Kräfte, welche die den materiellen Punkten wirklich ertheilte Bewegung hervorzubringen vermögen, also die bewahrten Kräfte, durch $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$. Für die verlorenen Kräfte ergeben sich also folgende Ausdrücke

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Da zwischen diesen verlorenen Kräften Gleichgewicht bestehen soll, so ist

$$S\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + S\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + S\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0.$$

Dies ist die nämliche Gleichung, wie die oben gefundene. Ueberhaupt kommt es auf eins heraus, ob man die

verlorenen Kräfte ins Gleichgewicht setzt oder die bewahrten Kräfte und die nach entgegengesetzter Richtung genommenen aufs System wirkenden äußern Kräfte. Denn für jeden Punkt des Systems ist die verlorene Kraft gleich und direct entgegengesetzt der Resultierenden aus der bewahrten Kraft und der nach der entgegengesetzten Richtung genommenen auf das System wirkenden äußern Kraft.

§. 258. Bei der Entwickelung dieser Sätze nahmen wir an, daß die auf das System wirkenden Kräfte stetig wirken; sie ertheilen den verschiedenen materiellen Punkten Bewegungen, welche sich continuierlich und progressiv ändern; so daß im allgemeinen die Geschwindigkeiten in unendlich kleinen Zeiträumen sich nur um eine unendlich kleine Größe ändern. Zuweilen liegen jedoch auch solche Kräfte uns zur Untersuchung vor, welche dadurch, daß sie in äußerst kurzer Zeit außerordentlich starken Druck ausüben, die Geschwindigkeiten der Theile des Systems um endliche Größen ändern, wiewohl die Dauer dieser Einwirkungen für unsere Sinne $= 0$ ist. In derartigen Fällen darf man annehmen, daß während der unendlich kurzen Einwirkung dieser Kräfte die Lage der materiellen Punkte des Systems sich nicht geändert hat.

Man kann folglich in der Gleichung

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

die Größen δx, δy, δz so ansehen, als ob sie mit der Zeit sich nicht änderten. Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit dt multipliciert und von $t=0$ bis $t=t$ integriert, so erhält man

$$S.m\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)\delta x+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)\delta y+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)\delta z\right]$$

$$=S.(\delta x\int_0^t Xdt+\delta y\int_0^t Ydt+dz\int_0^t Zdt)$$

$\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$ sind hierin die Geschwindigkeiten des materiellen Punkts von der Masse m für $t = 0$; demnach sind

$$m\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right), \quad m\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right), \quad m\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right),$$

die Größen der Bewegung, welche der materielle Punkt nach der Richtung jeder Axe erhalten hat und

$$\int_0^t Xdt, \quad \int_0^t Ydt, \quad \int_0^t Zdt$$

sind die Größen der Bewegung, welche ihm die auf ihn wirkenden äußern Kräfte nach derselben Richtung hin ertheilt haben. Die Gleichung spricht also folgendes Gesetz aus: die Größe der Bewegung, welche während der sehr kurzen Dauer der hier berücksichtigten Einwirkung die Theile des Systems erhalten haben, muß der Größe der Bewegung das Gleichgewicht halten, welche die nach der entgegengesetzten Richtung genommenen äußern Kräfte den Theilen des Systems ertheilt haben; folglich gilt das D'Alembertsche Princip auch für den Fall, daß eine plötzliche Aenderung in der Bewegung eines Systemes eintritt, ebensowohl wie es in dem Falle gilt, wo die Bewegung sich in unmerklicher Stufenfolge ändert.

XVIII. Bewegung zweier materieller, schwerer Punkte, die durch einen biegsamen Faden verbunden sind.

§. 259. Es seien zwei materielle Punkte von den Massen m und m' gezwungen sich auf zwei geneigten Ebenen, welche mit der Vertikallinie die Winkel θ und θ' bilden, zu bewegen, indem sie unter einander durch einen

vollkommen biegsamen Faden verbunden sind, der über eine feste in dem Gipfel der beiden Ebenen angebrachte Rolle läuft. Durch g bezeichnen wir die den schweren Körpern in der Zeiteinheit durch die Schwerkraft ertheilte Geschwindigkeit. Wenn nun dem Systeme eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit ertheilt ist und es dann der Einwirkung der Schwerkraft überlassen bleibt; so ist unsere Aufgabe die Art der Bewegung, die es erhält, zu bestimmen.

Man löst diese Aufgabe nach Anleitung des §. 257, wenn man ausdrückt, daß Gleichgewicht besteht zwischen den Kräften, welche die Bewegungen der materiellen Punkte hervorbringen und den auf diese Punkte wirkenden, nach entgegengesetzten Richtungen genommenen Kräften, oder, was auf eins herauskommt, zwischen den durch die materiellen Punkte verlorenen Kräften. Nennt man v und v' die den Punkten m und m' am Ende der Zeit t zukommenden Geschwindigkeiten, welche wir dann als positiv ansehen, wenn die Körper fallen; so erhalten wir hier nach der in §. 257 gegebenen Formel folgende Gleichung

$$mg \cos.\theta - m\frac{dv}{dt} = m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv'}{dt};$$

oder da $v' = -v$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m\cos.\theta - m'\cos.\theta'}{m+m'}.g.$$

Durch Integration erhält man

$$v = \frac{m\cos.\theta - m'\cos.\theta'}{m+m'}.gt + V.$$

V ist der Anfangswerth der Geschwindigkeit v des Punktes m.

Die Bewegung der Punkte ist gleichförmig beschleunigt oder verzögert; sie kann einer constanten Kraft zugeschrieben werden, welche im Verhältniß des Bruchs $\frac{m\cos.\theta - m'\cos.\theta'}{m+m'}$ kleiner ist, als die Schwerkraft.

Die Spannung des Fadens ist das Resultat der gegenseitigen Aufhebung der gleichen Kräfte

$$mg\cos.\theta - m\frac{dv}{dt} \text{ und } m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv'}{dt};$$

welche dadurch bewirkt wird, daß der Faden die beiden materiellen Punkte verbindet. Diese Spannung hat demnach den constanten Werth $\frac{m\,m'}{m+m'}(\cos.\theta - \cos.\theta')\,g$.

§. 260. Bewegt sich der Punkt m auf einer vertikalen, der Punkt m' auf einer horizontalen Ebene; so geht die obige Formel über in

$$v = \frac{m}{m+m'}gt + V.$$

Diese Bewegung kann man der Einwirkung einer Kraft zuschreiben, welche um so viel kleiner ist, als die Schwerkraft, als die Masse des fallenden Körpers kleiner ist, als die Summe der Massen beider Körper. Die constante Spannung des Fadens hat den Werth $\frac{m\,.\,m'}{m+m'}g$.

§. 261. Wenn beide Körper sich in vertikalen Linien bewegen, so giebt die obige Formel

$$v = \frac{m-m'}{m+m'}gt + V.$$

Die Spannung des Fadens ist $\frac{2mm'}{m+m'}g$. Diese Formeln gelten für den Apparat, der unter dem Namen Atwoodsche Fallmaschine bekannt ist, wenn man von der Reibung und den Massen des Fadens und der Rolle abstrahiert.

§. 262. Es ist nicht schwerer die Aufgabe für den Fall aufzulösen, daß die materiellen Punkte durch Fäden getragen werden, welche über zwei Kreise von verschiedenen Halbmessern laufen, die an derselben festen horizontalen, der Schnittlinie der beiden geneigten Ebenen parellelen Axe befestigt sind. Wie in §. 259, so hat man auch hier die

durch beide Körper verlorenen Kräfte darzustellen durch

$$mg\cos.\theta - m\frac{dv}{dt} \text{ und } m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv'}{dt}.$$

Sind nun r und r' die Halbmesser der Kreise, über welche resp. die beiden Fäden laufen; so wird der Gleichgewichtszustand der verlorenen Kräfte ausgedrückt durch die Gleichung

$$\left(mg\cos.\theta - m\frac{dv}{dt}\right)r = \left(m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv'}{dt}\right)r';$$

oder da hier

$$v' = -\frac{r'v}{r},$$

so ist

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mr^2\cos.\theta - m'rr'\cos.\theta'}{mr^2 + m'r'^2}g.$$

Die Integration ergiebt

$$v = \frac{mr^2\cos.\theta - m'rr'\cos.\theta'}{mr^2 + m'r'^2}gt + V.$$

V ist wieder die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers m. Die Spannungen der die materiellen Punkte m und m' tragenden Fäden sind resp.

$$\frac{mm'(r'^2\cos.\theta + rr'\cos.\theta')}{mr^2 + m'r'^2}g \text{ und } \frac{mm'(rr'\cos.\theta + r^2\cos.\theta')}{mr^2 + m'r'^2}.$$

§. 263. Wir wollen noch die Aufgabe des §. 259 auflösen, indem wir auf die Reibung der beiden Körper gegen die geneigte Ebene Rücksicht nehmen; den aus der Reibung hervorgehenden Widerstand nehmen wir dem Druck jedes Körpers gegen die bezügliche Ebene proportional. Demnach bezeichnen wir das Verhältniß der Reibung zum Druck für den ersten Körper durch f, für den zweiten durch f'. Dann drückt man unter der Voraussetzung, daß der Körper m der sinkende ist, das Gleichgewicht der verlorenen

Kräfte aus durch die Gleichung

$$mg\cos.\theta - fmg\sin.\theta - m\frac{dv}{dt} = m'g\cos.\theta' + f'm'g\sin.\theta' - m'\frac{dv'}{dt}.$$

Man leitet daraus ab, wie oben

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m(\cos.\theta - f\sin.\theta) - m'(\cos.\theta' + f'\sin.\theta')}{m+m'} g.$$

und

$$v = \frac{m(\cos.\theta - f\sin.\theta) - m'(\cos.\theta' + f\sin.\theta')}{m+m'} gt + V.$$

Die gemeinsame Bewegung der beiden Körper ist stets gleichförmig beschleunigt oder verzögert. Der Werth der constanten Spannung des Fadens ist

$$\frac{mm'}{m+m'}(\cos.\theta - f\sin.\theta + \cos.\theta' + f'\sin.\theta')g.$$

§. 264. Wenn der Körper m vertikal sinkt, während m' sich auf einer horizontalen Ebene bewegt, wie in §. 260 angenommen war; so ist einfach

$$v = \frac{m - f'm'}{m+m'} gt + V.$$

und die Spannung des Fadens

$$\frac{mm'}{m+m'}(1 + f')g.$$

Andere Resultate erhält man, wenn man die Intensität des Reibungswiderstandes von der Schnelligkeit der Bewegung abhängig annimmt. Durch genaue Versuche hat man nun aber constatiert, daß in den genannten Fällen die Bewegungen der Körper gleichförmig beschleunigt oder verzögert sind: daraus ergiebt sich, daß die Stärke des Reibungswiderstandes von der Geschwindigkeit völlig unabhängig ist. Die Intensität desselben ist also unter sonst gleichen Umständen dem Druck der Körper gegeneinander proportional.

Bewegung eines vollkommen biegsamen und unausdehnsamen Fadens.

§. 265. Um noch an einem Beispiele nachzuweisen, wie man verfährt, wenn Variationsrechnung auf Aufgaben der Mechanik angewandt werden soll, wollen wir die Bewegung eines vollkommen biegsamen und unausdehnsamen Fadens bestimmen. m sei die Masse der Längeneinheit des Fadens, s der von einem beliebigen festen Punkte der Curve aus gerechnete Bogen der Curve, s_0 und s_ω die Werthe des Bogens s für das erste und das letzte Ende des Fadens; durch x, y, z bezeichnen wir die Coordinaten des Punkts im Raume, in denen sich am Ende der Zeit t der am Ende des Bogens s liegende Punkt des Fadens befindet. Da die Masse des auf diesen Punkt folgenden Elements $m\,ds$ ist; so sind die durch dies Element verlorenen Kräfte parallel mit den drei Axen bezüglich

$$-m\,ds\,\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\,ds\,\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\,ds\,\frac{d^2z}{dt^2},$$

weil eine äußere Kraft auf den Faden nicht wirken soll. Der Faden muß im Gleichgewichte sein, wenn man annimmt, daß jedes seiner Elemente unter Einwirkung der verlorenen Kräfte steht; dies läßt sich nach §. 251 ausdrücken durch

$$0 = \int_{s_0}^{s_\omega} m\,ds\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right).$$

Da ferner der Faden unausdehnsam sein soll, so muß man nach Anleitung des §. 244 zur rechten Seite dieser Gleichung das Integral $\int_{s_0}^{s_\omega} \lambda\delta ds$, wie §. 251 dargethan ist, addieren, worin λ die Spannung bezeichnet, welche das Längenelement ds des Fadens zu ertragen hat. Die Gleichung

$$0=\int_{s_0}^{s_\omega} m\,ds\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)+\int_{s_0}^{s_\omega}\lambda\,\delta ds$$

drückt vollständig die Bedingungen der Bewegung des Systems aus. Die Größen x, y, z müssen als Functionen des Bogens s und der Zeit t angesehen werden.

Da nun

$$\delta ds=\frac{dx}{ds}\delta dx+\frac{dy}{ds}\delta dy+\frac{dz}{ds}\delta dz,$$

so läßt sich die obige Gleichung umformen in

$$0=\int_{s_0}^{s_\omega} ds\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{\delta dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{\delta dz}{ds}\right)\right];$$

also wenn man im letzten Gliede die Ordnung der Zeichen d und δ vertauscht und das Verfahren der Integrierung durch Theile anwendet

$$0=\int_{s_0}^{s_\omega} ds\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\right.$$
$$\left.-\frac{d}{ds}\lambda\frac{dx}{ds}\delta x-\frac{d}{ds}\lambda\frac{dy}{ds}\delta y-\frac{d}{ds}\lambda\frac{dz}{ds}\delta z\right]$$
$$-\lambda_0\left(\frac{dx_0}{ds_0}\delta x_0+\frac{dy_0}{ds_0}\delta y_0+\frac{dz_0}{ds_0}\delta z_0\right)$$
$$+\lambda_\omega\left(\frac{dx_\omega}{ds_\omega}\delta x_\omega+\frac{dy_\omega}{ds_\omega}\delta y_\omega+\frac{dz_\omega}{ds_\omega}\delta z_\omega\right).$$

Setzt man demnach einzeln die Coefficienten der Variationen δx, δy und δz in dem Ausdrucke unter dem Integrationszeichen $=0$, so hat man zunächst die drei unbestimmten Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right),$$

die für jeden Punkt des Fadens gültig sein müssen. Die nicht unter dem Integrationszeichen stehenden Ausdrücke, die den Endpunkten des Fadens angehören, verschwinden von selbst, wenn diese Endpunkte fest sind, so daß die Spannungen der letzten Elemente dann beliebige Werthe haben können. Wenn die Enden des Fadens völlig frei sind, so können diese Ausdrücke nur dann verschwinden, wenn $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_\omega = 0$, die Spannungen also den Werth 0 haben. Wenn aber die Enden des Fadens frei sind und besondere Kräfte auf dieselben wirken, deren virtuelle Momente in die Gleichung des Gleichgewichts aufgenommen werden müssen; so müssen offenbar jene Spannungen den auf den betreffenden Endpunkt wirkenden Kräften bezüglich gleich und entgegengesetzt sein.

§. 266. Wir wollen annehmen, daß das erste Ende des Fadens fest ist und in der Axe der x liegt; daß das zweite Ende ohne fest zu sein in derselben Axe zu bleiben gezwungen ist. Wir wollen außerdem voraussetzen, daß der Faden bei seiner Bewegung solche Gestalten annimmt, daß er sich sehr wenig von der Axe entfernt, in der seine beiden Endpunkte liegen, so daß man ohne merklichen Irrthum ds durch dx ersetzen kann. Dann reduciert sich die Gleichung, welche ausdrückt, daß die auf die Endpunkte des Fadens bezüglichen Ausdrücke $= 0$ sind, auf

$$0 = \lambda_\omega \delta x_\omega.$$

Dieser Gleichung kann man nur Genüge leisten, wenn man entweder $\lambda_\omega = 0$ setzt, oder annimmt, daß eine Kraft T, deren virtuelles Moment $T\delta x_\omega$ ist und die nach Richtung

der Axe der x wirkt, am zweiten Ende des Fadens angebracht ist. Nach dieser zweiten Hypothese verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$0 = \lambda_\omega \delta x_\omega + T \delta x_\omega,$$

und man leistet derselben Genüge, wenn man $\lambda_\omega = - T$ setzt. Ferner kann man in Folge der Annahme, daß die Curve, die der Faden bildet, sich überall sehr wenig von der geraden Linie entfernt, der Spannung λ in der ganzen Ausdehnung des Fadens einen constanten, dem der Kraft T gleichen Werth zuschreiben. Dann reducieren sich die unbestimmten Gleichungen auf

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\frac{d^2y}{dx^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Die erste zeigt an, daß in Folge der obigen Annahmen die Punkte des Fadens keine merkliche Bewegung nach Richtung der Axe der x haben. Die beiden letzten geben das Gesetz der Bewegung dieser Punkte nach Richtung der y und z (vergl. II. §. 494 u. ff. des Lehrb. der Diff. Rechn.). Man sieht, daß die Theile des Fadens sehr kleine Schwingungen zugleich nach zwei verschiedenen Richtungen machen können und daß diese Schwingungen jedesmal so stattfinden, als ob jede allein stattfände. Dieser Satz läßt sich allgemein auf die sehr kleinen Bewegungen eines beliebigen Systems materieller Punkte anwenden und selbst bei praktischen Anwendungen auf alle die Fälle, deren Gesetze durch lineäre Differentialgleichungen ausgedrückt werden können.

XIX. Stoß zweier fester Körper.

§. 267. Zwei gleichartige sphärische Körper, oder allgemeiner zwei Rotationskörper, mögen sich nach Richtung derselben geraden Linie, in der auch die Axen beider liegen,

mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen. Sobald beide Körper auf einander treffen, findet ein Stoß statt; d. h. die Körper üben während eines kleinen Zeitraums gegen einander einen Druck aus und fahren fort, sobald als dieser Druck aufgehört hat, sich längs derselben Linie mit solchen Geschwindigkeiten zu bewegen, die von den ihnen vor Beginn des Stoßes einwohnenden Geschwindigkeiten verschieden sind. Es handelt sich hier darum zu entwickeln, unter welchen Umständen der Stoß vor sich geht, besonders aber, wenn man die resp. Massen der Körper und ihre Anfangsgeschwindigkeiten kennt, zu bestimmen, welchen Werth die Endgeschwindigkeiten nach Aufhören des Stoßes haben.

Es läßt sich nicht umgehen, wenn man sich von diesem Vorgange ein genaues Bild machen will, auf die Elastizität genannte Eigenschaft der festen Körper Rücksicht zu nehmen. Mit diesem Namen bezeichnet man nämlich die Fähigkeit derselben ihre Gestalt ein wenig zu ändern, wenn auf einen Theil ihrer Oberfläche ein Druck geübt wird, dieser Veränderung Widerstand zu leisten und von selbst theilweise oder vollständig ihre anfängliche Gestalt wieder anzunehmen, wenn der Druck aufgehört hat. Wenn zwei Körper auf einander stoßen; so üben sie gegen einander einen Druck aus, dessen Intensität sich während der Dauer des Drucks ändert und durch dessen Einwirkung die Gestalt ihrer Oberfläche nahe beim Berührungspunkte eine leichte Aenderung erleidet, die wir mit dem Namen Eindruck bezeichnen wollen. Die Tiefe des Eindrucks ist um so größer, je größer der geübte Druck war und es besteht im allgemeinen ein Verhältniß zwischen dem geübten Drucke und der Tiefe des hervorgebrachten Eindrucks, das von der Gestalt und von der physischen Beschaffenheit des Körpers abhängt. Wir nennen nun

m, m' die Massen beider Körper;

V, V' die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte beider Körper in dem Augenblicke, wo der Stoß beginnt; diese Geschwindigkeiten mögen nach derselben Seite hin wirken, so daß $V > V'$;

v, v' die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte der beiden Körper am Ende der vom Anfange des Stoßes aus gerechneten Zeit t;

x, x' die Entfernungen der Punkte, in denen die Schwerpunkte der beiden Körper am Ende der Zeit t liegen, von einem festen Punkte auf der Richtung der Bewegung aus gemessen;

i, i' die Tiefen der in beiden Körpern in demselben Augenblicke gemachten Eindrücke; diese sind stets sehr kleine Größen;

N der Werth des am Ende der Zeit t durch jeden Körper auf den andern geübten Drucks.

Wenn nicht angenommen wird, daß eine äußere Kraft auf die Körper wirkt, so werden etwaige Veränderungen ihrer Bewegungen während des Stoßes nur durch ihre gegenseitige Einwirkung hervorgebracht. Mit Berücksichtigung dieser Einwirkung kann man übrigens nach §. 255 die Bedingungen des Gleichgewichts jedes der Körper ebenso ausdrücken, als ob er frei wäre. Nehmen wir also an, wie es zu thun erlaubt ist, daß die ganze Masse jedes Körpers in seinem Schwerpunkte concentriert ist, so haben wir hier die beiden Gleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N \quad \text{und} \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = N$$

oder auch

$$m\frac{dv}{dt} = -N, \qquad m'\frac{dv'}{dt} = N.$$

ferner sieht man, daß der numerische Totalwerth des Integrals, welches die Summe der Größen der Einwirkung darstellt, die von dem Druck eines Körpers gegen den andern herrühren, ist

$$\int N(di + di') = \tfrac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(V - V')^2.$$

Im zweiten Theile des Stoßes vermindert sich die Tiefe der Eindrücke durch das den Körpern eigenthümliche Streben ihre ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen. Eine neue Kraft, die beide Körper von einander zu entfernen strebt, fängt an zu wirken und verändert die Bewegungen; dann wird die Geschwindigkeit $v < v'$ und man muß in den obigen Formeln die untern Zeichen nehmen. Der Stoß ist geendigt, wenn die Entfernung der Schwerpunkte der beiden Körper sich wiederum, in Folge des Unterschieds der ihnen zukommenden Bewegungen, um die Größe vermehrt hat, um welche die Eindrücke i und i' sie in dem Augenblicke vermindert hatten, wo dieselben ihren größten Werth erreicht hatten.

§. 271. Im allgemeinen ist es unmöglich nach den vorangehenden Sätzen die Endgeschwindigkeiten zweier Körper zu bestimmen, zwischen denen ein Stoß stattgefunden hat. Wenn eine solche Aufgabe vorliegt, ist es unumgänglich nothwendig auf die physische Beschaffenheit jedes Körpers Rücksicht zu nehmen, d. h. auf die Natur der seine Theile verbindenden innern Kräfte, vermöge deren er den Veränderungen seiner Gestalt mehr oder minder widerstrebt, und völlig oder nur theilweise seine ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen sucht, sobald diese eine Aenderung erlitten hat. Indessen läßt sich in zwei besondern Fällen die fragliche Größe wirklich bestimmen. Sie verdienen besondere Beachtung, weil sie die Grenzen bestimmen, zwischen denen jene innern Kräfte stets liegen.

Wir müssen zunächst den Fall hervorheben, wo die Körper von solcher Beschaffenheit sind, daß der gemachte Eindruck sich erhält, ohne daß die Körper ihre ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen streben. Dann ist offenbar der Stoß geendigt, wenn die Eindrücke ihr Maximum erreicht haben und die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte beider Körper gleich geworden sind. Die Formel

$$v = v'_1 = \frac{mV + m'V'}{m + m'}$$

drückt demnach in diesem Falle die beiden Körpern gemeinsame Geschwindigkeit aus, mit der sie sich nach dem Stoße bewegen ohne sich zu trennen und ohne irgend einen Druck auf einander auszuüben. Dies ist bei den völlig unelastischen Körpern der Fall.

§. 272. Der zweite Fall ist der, wo die Körper im Gegentheil völlig elastisch sind. Dann streben sie die gemachten Eindrücke gänzlich wieder auszugleichen und denselben Werthen von N gehören stets dieselben Werthe von i und i' an, während die Tiefe des Eindrucks im Wachsen und während sie im Abnehmen begriffen ist. Wenn die Körper diese Eigenschaft haben und wenn ferner die Eindrücke am Ende des Stoßes völlig verschwunden sind, d. h. in dem Augenblicke, wo die Körper sich trennen und aufhören auf einander einzuwirken (dieser Umstand tritt gewöhnlich nicht ein und hängt von dem Verhältniß zwischen den Massen beider Körper ab); so erhält man augenscheinlich die Werthe der Endgeschwindigkeiten, wenn man in den Formeln des §. 269 das Integral $\int di + di' = 0$ setzt. Denn der Werth des Theils dieses Integrals, der dem ersten Theile der Dauer des Stoßes angehört, so lange der Eindruck im Wachsen ist, ist gleich und entgegengesetzt dem Werthe des Theils, der dem zweiten Theile der Stoßes angehört, während dessen der Eindruck im Abnehmen ist. Da

man außerdem in den Formeln des §. 269 die untern Vorzeichen nehmen muß; so erhält man folgende Ausdrücke für die Endgeschwindigkeiten

$$v = \frac{(m - m')V + 2m'V'}{m + m'},$$

$$v' = \frac{(m' - m)V' + 2mV}{m + m'}.$$

Es verdient beachtet zu werden, daß diese Formeln für den Fall, daß die Massen beider Körper gleich sind, $v = V'$, $v' = V$ ergeben: es besteht hier die Wirkung des Stoßes darin, daß jedem der Körper die Geschwindigkeit des andern ertheilt wird.

§. 273. Bei den nicht elastischen Körpern, die uns in §. 271 beschäftigten, ist die lebendige Kraft des Systems vor dem Stoße $mV^2 + m'V'^2$; nach dem Stoße ist dieselbe $mv^2 + m'v'^2$, oder wenn wir den in §. 271 gefundenen gemeinsamen Werth von v und v' substituieren

$$\frac{(mV + m'V')^2}{m + m'}.$$

Der Unterschied der lebendigen Kräfte des Systems vor und nach dem Stoße oder die durch Einwirkung des Stoßes verlorene lebendige Kraft ist demnach

$$\frac{mm'}{m + m'}(V - V')^2$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem doppelten der Größen der Einwirkung, welche die während des Stoßes zur Wirkung gekommenen innern Kräfte hervorgebracht haben. Da nun dieser Ausdruck sich leicht nachweisbar zurückführen läßt auf

$$m(V - v)^2 + m'(V' - v')^2;$$

so folgt, daß die durch einen Stoß zwischen unelastischen Körpern verlorene lebendige Kraft gleich ist der lebendigen Kraft, welche den von jedem Körper durch Einwirkung des

Stoßes resp. verlorenen Geschwindigkeiten zugehört. Dieser Satz, der späterhin in größerer Allgemeinheit wird gegeben werden, läßt sich vielfach sehr nützlich anwenden.

§. 274. Wenn wir in dem in §. 272 vorgelegten Falle, daß ein Stoß zwischen zwei völlig elastischen Körpern stattfindet, die dort gegebenen Werthe von v und v' in die Formel $mv^2 + m'v'^2$ hineinsetzen, so erhalten wir

$$m V^2 + m' V'^2.$$

Folglich nimmt hier die lebendige Kraft am Ende des Stoßes ihren anfänglichen Werth wieder an. Dies muß wirklich der Fall sein, weil hier der Werth des Integrals, das die Größe der Einwirkung der durch den Stoß hervorgerufenen innern Kräfte darstellt, $= 0$ ist. So bringt ein Stoß zwischen zwei vollkommen elastischen Körpern keinerlei Verlust an lebendiger Kraft hervor; man darf aber dabei nicht vergessen, daß die in §. 272 gegebenen Werthe der Endgeschwindigkeiten, folglich auch das obige Resultat nur dann gültig sind, wenn den in jenem §. ausgesprochenen Bedingungen Genüge geleistet ist. Nämlich es müssen die Körper nicht nur völlig elastisch sein, sondern sie müssen auch in dem Augenblicke, in welchem der Stoß zu Ende ist, ihre ursprüngliche Gestalt völlig wieder angenommen haben, was nur in sehr besondern Fällen eintreten kann.

Bemerkung.

§. 275. Die Theorie vom Stoß der Körper wird oft von andern Gesichtspunkten aus dargestellt. Man untersucht zunächst völlig harte Körper, solche also, deren Gestalt keinerlei Veränderung erleiden kann. In diesem Falle muß ein Stoß augenblicklich die Geschwindigkeiten der beiden Körper ändern, so daß beide einen gemeinsamen Werth erhalten. Nennen wir diese gemeinsame Geschwindigkeit v,

so sind die durch jeden der Körper durch Einwirkung des Stoßes verlornen Größen der Bewegung resp. $m(V-v)$ und $m'(V'-v)$. Nach dem in §. 255 gegebenen Satze müssen diese Größen der Bewegung den Größen der Bewegung das Gleichgewicht halten, welche die auf jeden der Körper während des Stoßes einwirkenden Kräfte diesen ertheilen, wenn man dieselben nach der entgegengesetzten Richtung nimmt. Diese letztern Kräfte jedoch, die einander gleich sind und nach entgegengesetzten Seiten längs derselben geraden Linie hin wirken, heben sich gegenseitig auf. Das Gleichgewicht läßt sich demnach ausdrücken durch die Gleichung

$$m(V-v)+m'(V'-v)=0;$$

folglich ist

$$v=\frac{mV+m'V'}{m+m'}.$$

Dies Resultat stimmt völlig mit dem in §. 273 erhaltenen überein, wo wir völlig unelastische Körper in Untersuchung zogen. So entspricht die rein mathematische Hypothese von völlig harten Körpern in Wirklichkeit dem Zustande der Körper, die nicht gegen Gestaltveränderungen reagieren und die gemachten Eindrücke ohne Aenderung behalten (wenn es solche Körper giebt).

§. 276. Indem man zweitens völlig elastische Körper betrachtet, erklärt man die Elastizität so, daß ein gegen eine feste Ebene geworfener Körper von dieser Eigenschaft nach entgegengesetzter Richtung mit derselben Geschwindigkeit zurückgestoßen wird, wie die war, die er im Augenblick des Stoßes hatte, oder daß er im allgemeinen nach dem Stoße in entgegengesetzter Richtung in jedem Punkte der Bahn die Geschwindigkeit wieder erhält, die er durch den Stoß verloren hat. Wenn demnach die beiden Körper durch Einwirkung des Stoßes resp. die Geschwindigkeiten $V-v$ und

$-(v-V')$ verloren haben, so müssen ihre Geschwindigkeiten am Ende des Stoßes bezüglich die Werthe $v-(V-v)$ und $v+(v-V')$ erhalten, d. h. $2v-V$ und $2v-V'$; dies giebt, wenn man für v den vorher erhaltenen Werth hineinsetzt

$$v=\frac{(m-m')V+2m'V'}{m+m'},\quad v=\frac{(m-m')V'+2mV}{m+m'}.$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den in §. 272 gegebenen überein.

Doch die Art der Betrachtung, wie sie in §. 267 u. ff. angestellt ist, ist wohl der Sache angemessener, indem sie richtigere Ideen über die Natur dieser Erscheinung giebt und zugleich die Beschränkungen klar macht, die bei Anwendung der obigen Resultate gemacht werden müssen.

XX. Bewegung eines vollen Körpers, der gezwungen ist sich um eine feste Axe zu drehen.

---

§. 277. Ein Körper, den wir als ein System unveränderlich unter einander verbundener materieller Punkte ansehen, möge so der Einwirkung mehrerer beliebiger Kräfte unterliegen, daß die Rotationsbewegung um eine feste Axe die einzige ist, welche das System annehmen kann. Wir nennen nun

m die Masse eines dieser materiellen Punkte;

x, y, z die drei rechtwinklichten Coordinaten des Orts, in welchem sich der Punkt am Ende der Zeit t befindet;

X, Y, Z die drei Componierenden nach Richtung der x, y, z der auf diesen Punkt wirkenden Kraft, die in Gewichtseinheiten gegeben sein muß.

Nach §. 257 ist das System dann im Gleichgewichte, wenn die in einem beliebigen Augenblicke verlorenen Kräfte sich einander das Gleichgewicht halten. Die verlorenen Kräfte nach Richtung der x, y und z werden für jeden materiellen Punkt ausgedrückt durch

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Diese sollen sich um die feste Axe das Gleichgewicht halten; wenn wir annehmen, daß diese Axe mit der der x zusammenfällt, so ergiebt sich für den Gleichgewichtszustand des Systems aus §. 64 die einzige Gleichung

$$S.\left[\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)z - \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)y\right] = 0,$$

oder auch

$$S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) = S(Yz - Zy).$$

S bezeichnet, wie immer, daß die Summe der diesem Zeichen folgenden Größen in Beziehung auf alle das System bildende Körper genommen werden soll.

Die nach Richtung der x parallel der festen Axe wirkenden verlorenen Kräfte, deren Summe $S\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ist, werden durch den Widerstand der Stützpunkte aufgehoben, da der feste Körper der Annahme nach sich nicht nach Richtung dieser Axe hin bewegen kann. Die Bewegung des Körpers hängt demnach allein von den Kräften Y und Z, welche in senkrecht gegen die feste Axe stehenden Ebenen wirken, und von der anfänglichen Rotationsgeschwindigkeit um diese Axe ab.

§. 278. Bei dem Gleichgewicht der verlorenen Kräfte um die feste Axe wirkt wegen der gegenseitigen Aufhebung dieser Kräfte ein zweifacher Druck senkrecht gegen die Axe; nämlich nach §. 66, 1⁰. ein Druck parallel der Axe der y, dessen Werth ist

$$S.\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

und dessen Angriffspunkt auf der festen Axe um das Stück

$$\frac{S.\left(Yx-mx\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{S.\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)}$$

vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt ist; 2º ein der Axe der z parallel wirkender Druck, dessen Werth

$$S.\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

dessen Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten auf der festen Axe ist

$$\frac{S.\left(Zx-mx\frac{d^2z}{dt^2}\right)}{S.\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)}.$$

§. 279. Die obigen Ausdrücke lassen sich in andere Form bringen. Ist v die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung am Ende der Zeit t, d. h. die Rotationsgeschwindigkeit der um die Einheit von der festen Axe entfernt liegenden Punkte, und ist r die Entfernung der Punkte, deren Coordinaten auf dieser nämlichen Axe $=y$ und z sind; so hat man

$$\frac{dy}{dt}=v.r.\frac{z}{r}=v.z \text{ und } \frac{dz}{dt}=-v.r\frac{y}{r}=-v.y.$$

Die Gleichung in §. 277, welche das Gesetz der Bewegung giebt, läßt sich demnach auch so schreiben

$$\frac{dv}{dt}.S.mr^2=S.(Yz-Zy);$$

oder, wenn man die Resultierende der beiden Kräfte y und z durch P, die Entfernung der Richtung dieser Resultierenden von der festen Axe durch p bezeichnet

$$\frac{dv}{dt}.S.mr^2 = S.Pp, \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{S.Pp}{S.mr^2}.$$

Diese Gleichung giebt an, wie die Winkelgeschwindigkeit sich mit der Zeit ändert. Sie ist der Gleichung $\frac{dv}{dt} = \frac{P}{m}$, welche der geradlinigen Bewegung angehört, worin v die absolute Geschwindigkeit bezeichnet, analog. Die Größe $S.mr^2$, d. h. die Summe der Massen der materiellen Punkte, multiplicirt mit den Quadraten ihrer Entfernungen von einer festen Axe, ist von großer Wichtigkeit und wird nach Eulers Vorgange **Trägheitsmoment** genannt. Das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine gegebene Linie bildet eine Art von Maß für die Stärke der Rotationsbewegung, welche diesem Körper zukommen würde, wenn er sich um diese Linie, nachdem sie zur festen Axe geworden, drehte. Ebenso ist auf der andern Seite der Druck, den man ausüben muß um dem Körper eine beliebige Bewegung zu ertheilen oder um die Bewegung aufzuheben, welche der Körper besitzt, seinem Trägheitsmomente proportional.

§. 280. Wenn man die in §. 278 gegebenen Formeln ebenso umgestaltet, so erhält man folgende Werthe für den auf die feste Axe nach Richtung der y und z geübten Druck:

$$S.\left(Y - mz\frac{dv}{dt} + my.v^2\right) \text{ und } S.\left(Z + my\frac{dv}{dt} + mz.v^2\right)$$

und für die resp. Entfernungen der Angriffspunkte dieses Drucks vom Anfangspunkte der Coordinaten

$$\frac{S.\left(Yx - mxz\frac{dv}{dt} + mxyv^2\right)}{S.\left(Y - mz\frac{dv}{dt} + my.v^2\right)} \text{ und } \frac{S.\left(Zx + mxy\frac{dv}{dt} + mxzv^2\right)}{S.\left(Z + my\frac{dv}{dt} + mzv^2\right)}$$

§. 281. Wenn auf das System keine Kraft wirkt; so reduciert sich die Gleichung von §. 279 auf

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad v = V,$$

wenn man durch V die anfängliche Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Der Körper hat also eine gleichförmige Rotationsbewegung um die feste Axe. Aus Veränderung der Bewegung kann kein Druck auf die Axe geübt werden und der Druck, den diese zu ertragen hat, reduciert sich auf die Theile $S.my.v^2$ und $S.mz.v^2$, die allein aus der Einwirkung der durch die Rotationsbewegung des Körpers hervorgebrachten Centrifugalkraft hervorgehen.

§. 282. Der gegen die feste Axe durch Einwirkung der Centrifugalkraft ausgeübte Druck, welche in allen materiellen Theilen des Systems wirkt, läßt sich folgendermaßen direct bestimmen. Für jeden der materiellen Punkte bringt, wie §. 148 nachgewiesen ist, diese Kraft den nach Richtung des Halbmessers wirkenden Druck $m\frac{v^2r^2}{r}$ oder mv^2r hervor, dessen Werth den Werthen des nach Richtung der y wirkenden Drucks mv^2y und des nach Richtung der z wirkenden mv^2z gleich ist. So übt die Centrifugalkraft auf die feste Axe nach Richtung der y und der z bezüglich den Druck aus

$$v^2.S.my \quad \text{und} \quad v^2S.mz;$$

die Angriffspunkte dieses Drucks auf dieser selben Axe sind bezüglich von dem Anfangspunkte der Coordinaten um die Größen entfernt

$$\frac{S.mxy}{S.my} \quad \text{und} \quad \frac{S.mxz}{S.mz}.$$

Dieser Druck strebt die Rotationsaxe von der Stelle zu rücken und diese Axe würde in der That ihre Lage ändern, wenn sie nicht in derselben erhalten würde.

§. 283. In einigen besondern Fällen übt die Centrifugalkraft des Systems keinen Druck gegen die feste Rotationsaxe; nämlich wenn 1°

$$S.my = 0 \quad \text{und} \quad S.mz = 0$$

und somit die Summe der den Axen der y und der z parallel geübten Einwirkungen $= 0$ ist; und wenn 2°

$$S.mxy = 0 \quad \text{und} \quad S.mxz = 0$$

und somit die Summe der Momente dieses Drucks gleichfalls $= 0$ ist. Der ersten Bedingung wird stets Genüge geleistet, wenn die feste Axe durch den Schwerpunkt des Körpers hindurchgeht. Auch der zweiten Bedingung kann man, wie weiter unten nachgewiesen werden soll, dadurch immer Genüge leisten, daß man der festen Axe gegen die Theile des Systems eine angemessene Richtung giebt.

Wenn eine gerade Linie durch den Schwerpunkt eines Körpers hindurchgeht, für welche die Gleichungen $S.mxy = 0$ und $S.mxz = 0$ gelten; so hat sie diese bemerkenswerthe Eigenschaft: wenn der Körper frei ist und keine äußere Kraft auf ihn einwirkt, so behält er dieselbe Rotationsbewegung fortwährend bei, wenn er einmal angefangen hat sich um jene Linie zu drehen, ohne daß die Axe irgend welche Verschiebung erleidet. Man nennt eine solche Linie **natürliche** oder **permanente Rotationsaxe**.

§. 284. Wenn die feste Axe nicht durch den Schwerpunkt hindurchgeht, so ist nicht $S.my = 0$ und $S.mz = 0$; folglich kann der gegen die Axe geübte doppelte Druck nicht gleich 0 sein, noch auf Kräftepaare reduciert werden. Ist jedoch

$$\frac{S.mxy}{S.my} = \frac{S.mxz}{S.mz},$$

so können beide Kräfte, die den Druck üben, wenn ihre Angriffspunkte in demselben Punkte der Axe liegen, zu einer

einzigen zusammengesetzt werden: der resultierende Druck kann dann dadurch aufgehoben werden, daß man diesen Angriffspunkt fest macht. Wenn

$$\frac{S.mxy}{S.my} = \frac{S.mxz}{S.mz},$$

so erhält die Axe die Eigenschaft, daß es genügt einen ihrer Punkte fest werden zu lassen um sie zu einer natürlichen Rotationsaxe zu machen.

Man kann immer durch einen beliebigen innerhalb oder außerhalb eines vollen Körpers liegenden Punkt drei senkrecht auf einander stehende gerade Linien legen, für die, wenn sie als Axen der x, y und z genommen werden, die drei Verhältnisse bestehen

$$S.mxy = 0, \quad S.mxz = 0, \quad S.myz = 0.$$

Es giebt demnach stets drei permanente Rotationsaxen, die sich im Schwerpunkt des Körpers unter rechten Winkeln schneiden; ebenso giebt es für jeden beliebigen Punkt dieses Körpers drei senkrecht auf einander stehende gerade Linien, welche dadurch, daß dieser Punkt fest wird, zu permanenten Rotationsaxen werden. Diese Linien, welche man mit Euler Hauptaxen der Rotation oder einfach Hauptaxen benannt hat, müssen nothwendigerweise, wenn man die Bewegung der Körper bespricht, in Untersuchung gezogen werden.

Bestimmung der Hauptaxen.

§. 285. In einem System unveränderlich unter einander verbundener materieller Punkte, welche einen vollen Körper bilden, bezeichnen wir durch m die Masse eines dieser Punkte und durch x, y, z seine auf drei rechtwinklichten Axen gezählten Coordinaten. Legt man nun eine beliebige gerade Linie, die mit den Axen der x, y und z die

Winkel α, β, γ einschließt, durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurch; so läßt sich die Entfernung des Punktes m von dieser Linie ausdrücken durch

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-(x\cos.\alpha+y\cos.\beta+z\cos.\gamma)^2}.$$

Folglich, wenn man durch L das in Beziehung auf diese Linie genommene Trägheitsmoment des Systems bezeichnet, so ist

$$L=S.m[x^2+y^2+z^2-(x\cos.\alpha+y\cos.\beta+z\cos.\gamma)^2];$$

es läßt sich auch darstellen durch

$$L=S.m[x^2\sin.\alpha^2+y^2\sin.\beta^2+z^2\sin.\gamma^2 \\ -2xy\cos.\alpha\cos.\beta-2xz\cos.\alpha\cos.\gamma-2yz\cos.\beta\cos.\gamma],$$

oder auch durch

$$L=S.m[(y^2+z^2)\cos.\alpha^2+(x^2+z^2)\cos.\beta^2+(x^2+y^2)\cos.\gamma^2 \\ -2xy\cos.\alpha\cos.\beta-2xz\cos.\alpha\cos.\gamma-2yz\cos.\beta\cos.\gamma].$$

Setzt man endlich

$$A=S.m(y^2+z^2) \quad \text{und} \quad F=S.myz,$$
$$B=S.m(x^2+z^2) \quad\quad G=S.mxz,$$
$$C=S.m(x^2+y^2) \quad\quad H=S.mxy;$$

so ergiebt diese letzte Formel

$$L=A\cos.\alpha^2+B\cos.\beta^2+C\cos.\gamma^2 \\ -2F\cos.\beta\cos.\gamma-2G\cos.\alpha\cos.\gamma-2H\cos.\alpha\cos.\beta. \quad (p)$$

Die Größen A, B und C sind bezüglich die in Beziehung auf die Axen der x, y und z genommenen Trägheitsmomente des Systems. Die obige Formel giebt ganz allgemein das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine beliebige durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgehende Axe. Dabei ist die Richtung der Coordinatenaxen gegen die Theile des Körpers völlig willkührlich.

Wenn man übrigens die Coordinaten eines beliebigen Punkts der Axe, in Beziehung auf die das Trägheitsmoment L genommen ist, durch a, b, c bezeichnet; so kann man die obige Gleichung auch so schreiben

$$L(a^2+b^2+c^2) = Aa^2+Bb^2+Cc^2-2Fbc-2Gac-2Hab;$$

wenn man hierin $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{\sqrt{L}}$ nimmt, reduciert sie sich auf

$$1 = Aa^2+Bb^2+Cc^2-2Fbc-2Gac-Hab.$$

Wenn man also dieser Axe alle möglichen Lagen giebt und in jeder Lage auf ihr vom Anfangspunkt der Coordinaten ein Stück abschneidet, das gleich ist der Einheit dividiert durch die Quadratwurzel aus dem in Beziehung auf sie genommenen Trägheitsmomente; so gehören die so erhaltenen Punkte einem durch die obige Gleichung dargestellten Ellipsoide an.

§. 286. Wir wollen demnach nun die Richtungen der Linie bestimmen, in Beziehung auf die genommen das Trägheitsmoment L ein Maximum oder ein Minimum wird; oder was auf dasselbe herauskommt, die Richtungen der rechtwinklichten Axen des oben bezeichneten Ellipsoids aufsuchen. Diese Richtungen werden durch das Kennzeichen gegeben, daß der Werth von L sich nicht ändert, wenn man in der Gleichung (p) die Werthe der Winkel α, β, γ um eine unendlich kleine Größe sich ändern läßt. Bringt man die Gleichung auf die Form

$$L(\cos.\alpha^2+\cos.\beta^2+\cos.\gamma^2) = A\cos.\alpha^2+B\cos.\beta^2+C\cos.\gamma^2$$
$$-2F\cos.\beta\cos.\gamma-2G\cos.\alpha\cos.\gamma-2H\cos.\alpha\cos.\beta$$

und differentiiert der Reihe nach in Beziehung auf α, β und γ, so daß man L dabei als constant ansieht; so erhält man die drei Gleichungen

$$(L-A)\cos.\alpha+H\cos.\beta+G\cos.\gamma = 0,$$
$$H\cos.\alpha+(L-B)\cos.\beta+F\cos.\gamma = 0,$$
$$G\cos.\alpha+F\cos.\beta+(L-C)\cos.\gamma = 0,$$

denen die Werthe von α, β, γ und L Genüge leisten

müssen, wenn die letzte Größe ein Maximum oder Minimum ist. Zunächst erhält man daraus die Gleichung des dritten Grades

$$(L-A)(L-B)(L-C)-(L-A)F^2-(L-B)G^2-(L-C)H^2 + 2FGH = 0. \quad (q)$$

Sie giebt den Werth von L und enthält nothwendig drei reelle Wurzeln. Ferner hat man

$$\frac{\cos.\alpha}{\sqrt{(L-B)(L-C)-F^2}} = \frac{\cos.\beta}{\sqrt{(L-A)(L-C)-G^2}} = \frac{\cos.\gamma}{\sqrt{(L-A)(L-B)-H^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(L-B)(L-C)-F^2+(L-A)(L-C)-G^2+(L-A)(L-B)-H^2}} \quad (r)$$

um daraus den Werth der Winkel α, β und γ zu bestimmen, die den drei sich unter rechten Winkeln schneidenden geraden Linien angehören, denen die drei durch die Gleichung (q) gegebenen Werthe von L zukommen. Aus dem Vorhergehenden ist ferner ersichtlich, daß der größte dieser drei Werthe ein Maximum, der kleinste ein Minimum ist; der zwischen beiden liegende Werth ist weder Maximum noch Minimum, obgleich er der Bedingung Genüge leistet das Differential der ersten Ordnung der Function $L = 0$ zu machen.

Man kann nun aber jene drei Linien mit den Axen der x, y und z zusammenfallen lassen; wenn dies der Fall ist, so werden die drei Wurzeln der Gleichung (q) resp. $= A$, B und C sein; dies ist nur dann möglich, wenn $F = 0$, $G = 0$ und $H = 0$ ist. Wenn sich also die drei Gleichungen

$$S.myz = 0, \quad S.mxz = 0, \quad S.mxy = 0$$

aufstellen lassen; so fallen demnach die Coordinatenaxen mit den Richtungen der Linien zusammen, in Beziehung auf die das Trägheitsmoment Maximum oder Minimum ist; da es nun immer möglich ist die Coordinatenaxen mit

jenen Linien zusammenfallen zu lassen; so folgt daraus, daß man stets den Coordinatenaxen eine solche Richtung geben kann, daß jenen drei Gleichungen Genüge geleistet wird.

Wir haben aber in §. 284 mit dem Namen Hauptaxen drei Linien von solcher Beschaffenheit benannt, daß sie sich unter rechten Winkeln in einem beliebigen Punkte eines Körpers schneiden und daß sie zu Coordinatenaxen angenommen, den obigen drei Gleichungen Genüge leisten. Aus dem Vorhergehenden ersieht man nun, daß diese Hauptaxen eben die oben bestimmten rechtwinklichten Axen sind, deren Richtungen die Gleichungen (q) und (r) ergeben, deren einer der größte, einer andern der kleinste Werth aller Trägheitsmomente angehört, welche in Beziehung auf alle die geraden Linien genommen werden, die sich in dem als Anfangspunkte der Coordinaten angenommenen Punkte schneiden.

Eigenschaften der Hauptaxen in Beziehung auf die Trägheitsmomente.

§. 287. Wenn man in einem zur Untersuchung vorliegenden vollen Körper die im Anfangspunkte der Coordinaten sich schneidenden Hauptaxen als Coordinatenaxen der x, y und z angenommen hat; so ist in der Formel (p) des §. 285 $F=0$, $G=0$, $H=0$, und A, B und C sind die drei in Beziehung auf diese Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente des Körpers. Dann reduciert sich die Formel (p) auf

$$L = A.\cos.\alpha^2 + B.\cos.\beta^2 + C.\cos.\gamma^2:$$

das in Beziehung auf eine beliebige gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, genommene Trägheitsmoment läßt sich deshalb sehr einfach durch die drei Trägheitsmomente, die in Beziehung auf die in diesem Anfangspunkte

sich schneidenden Hauptaxen genommen sind, bestimmen, wenn man die Winkel berücksichtigt, die jene gerade Linie mit diesen Axen einschließt. Mit diesen Coordinatenaxen fallen die drei rechtwinklichten Axen des in §. 285 erwähnten Ellipsoids zusammen, dessen Radii Vectores sich ihrer Länge nach umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den diesen Radien zugehörigen Trägheitsmomenten verhalten. Die Gleichung der Oberfläche dieses Ellipsoids reduciert sich auf

$$1 = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2.$$

§. 288. Soll ferner das Trägheitsmoment nicht in Beziehung auf eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgehende gerade Linie genommen werden, sondern in Beziehung auf eine Linie, welche durch einen Punkt hindurchgeht, dessen Coordinaten x_1, y_1 und z_1 sind; so muß man x, y, z durch $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ in den in §. 285 gegebenen Formeln ersetzen. Folglich, wenn man wieder die Winkel, welche diese gerade Linie mit den Coordinatenaxen einschließt, durch α, β, γ bezeichnet, ist dies gesuchte Moment

$$S.m[(x-x_1)^2 \sin.\alpha^2 + (y-y_1)^2 \sin.\beta^2 + (z-z_1)^2 \sin.\gamma^2$$
$$-2(x-x_1)(y-y_1)\cos.\alpha\cos.\beta - 2(x-x_1)(z-z_1)\cos.\alpha\cos.\gamma$$
$$-2(y-y_1)(z-z_1)\cos.\beta\cos.\gamma].$$

Wenn aber der Anfangspunkt der Coordinaten x, y, z im Schwerpunkt des Körpers liegt, so daß alsdann $S.mx = 0$, $S.my = 0$, $S.mz = 0$; so gestaltet sich in Folge dieser Beziehung die obige Gleichung so

$$S.m[x^2 \sin.\alpha^2 + y^2 \sin.\beta^2 + z^2 \sin.\gamma^2$$
$$-2xy\cos.\alpha\cos.\beta - 2xz\cos.\alpha\cos.\gamma - 2yz\cos.\beta\cos.\gamma$$
$$+x_1{}^2 \sin.\alpha^2 + y_1{}^2 \sin.\beta^2 + z_1{}^2 \sin.\gamma^2$$
$$-2x_1y_1\cos.\alpha\cos.\beta - 2x_1z_1\cos.\alpha\cos.\gamma - 2y_1z_1\cos.\beta\cos.\gamma]$$

oder auch

$$S.m[x^2 \sin.\alpha^2 + y^2 \sin.\beta^2 + z^2 \sin.\gamma^2$$
$$- 2xy \cos.\alpha \cos.\beta - 2xz \cos.\alpha \cos.\gamma - 2yz \cos.\beta \cos.\gamma$$
$$+ x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 - (x_1 \cos.\alpha + y_1 \cos.\beta + z_1 \cos.\gamma)^2].$$

Der erste Theil dieser Formel giebt den Werth des Trägheitsmoments des Körpers in Beziehung auf eine Axe, welche der gegebenen Linie parallel durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, welcher unserer Annahme nach im Schwerpunkte des Körpers liegt. Der zweite Theil giebt das Product der Gesammtmasse des Körpers in das Quadrat der Entfernung der gegebenen Linie vom Anfangspunkte der Coordinaten. Wenn man folglich das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine beliebige durch den Schwerpunkt des Systems hindurchgehende gerade Linie kennt; so kann man für jede andere jener parallele Linie das Trägheitsmoment finden, indem man zu dem erstern Momente das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung der beiden geraden Linien addiert.

§. 289. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt hindurchgehende Linie wird nach der in §. 287 gegebenen Formel ausgedrückt durch

$$A \cos.\alpha^2 + B \cos.\beta^2 + C \cos.\gamma^2,$$

wo man durch A, B, C die Trägheitsmomente in Beziehung auf die drei Hauptaxen, welche sich im Schwerpunkte schneiden; durch α, β, γ die Winkel bezeichnet, welche die in Frage kommende Linie mit diesen Axen einschließt. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine dieser Linie parallele gerade Linie läßt sich demnach gemäß dem in §. 288 geführten Beweise ausdrücken durch

$$A \cos.\alpha^2 + B \cos.\beta^2 + C \cos.\gamma + Md^2,$$

wenn man die Gesammtmasse des Körpers M, die Entfernung jener beiden Linien d nennt. Wenn man also

nur die auf drei im Schwerpunkte sich schneidende Linien bezüglichen Trägheitsmomente kennt; so bestimmt man leicht das Trägheitsmoment in Beziehung auf jede andre Linie.

§. 290. Wenn man in der Formel des §. 287

$$L = A\cos.\alpha^2 + B\cos.\beta^2 + C\cos.\gamma^2$$

$A = B$ setzt; so reduciert sie sich auf

$$L = A\cos.\gamma^2 + C\cos.\gamma^2.$$

Daraus folgt, daß die Trägheitsmomente, welche in Beziehung auf alle einen gleichen Winkel mit der dritten Axe einschließenden Linien genommen sind, einander gleich sein müssen, wenn die zweien der Hauptaxen zugehörigen Trägheitsmomente einander gleich sind.

§. 291. Ist $A = B = C$, so reduciert sich dieselbe Formel auf $L = A$. Wenn demnach die Trägheitsmomente in Beziehung auf die drei in einem beliebigen Punkte eines Körpers sich schneidenden Hauptaxen genommen, einander gleich sind; so sind auch die in Beziehung auf alle geraden Linien genommenen Trägheitsmomente, welche durch denselben Punkt hindurchgehen, einander gleich. Natürlich sind, wenn die Trägheitsmomente in Beziehung auf alle durch einen Punkt hindurchgehenden Linien gleich sind, alle diese Linien Hauptaxen. Denn nach §. 285 ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine beliebige gerade Linie

$$L = S.m[(y^2+z^2)\cos.\alpha^2+(x^2+z^2)\cos.\beta^2+(x^2+y^2)\cos.\gamma^2 \\ -2xy\cos.\alpha\cos.\beta - 2xz\cos.\alpha\cos.\gamma - 2yz\cos.\beta\cos.\gamma];$$

sind die in Beziehung auf drei Axen genommenen Trägheitsmomente $= A$, so reduciert sich diese Gleichung auf

$$L = A - 2S.m(xy\cos.\alpha\cos.\beta + xz\cos.\alpha\cos.\gamma + yz\cos.\beta\cos.\gamma);$$

da nun dieser Ausdruck $= A$ sein muß für alle Werthe der Winkel α, β, γ; so erhält man die Gleichungen

$$S.mxy = 0, \quad S.mxz = 0, \quad S.myz = 0,$$

welche die Hauptaxen charakterisieren.

§. 292. Indem wir noch die Lösung einiger besonderer auf die Lage der Hauptaxen bezüglicher Aufgaben hinzufügen, wollen wir zunächst prüfen, welche Lage im Raume die Punkte haben, deren zugehörige Hauptaxen einander parallel sind. Bezieht man die Coordinaten x, y, z auf drei beliebige rechtwinklichte Axen, die durch den Schwerpunkt des Körpers hindurchgehen, und bezeichnet man ferner durch x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines gegebenen Punkts m_1, welche auf dieselben Axen bezogen sind; so wird die Bedingung, daß die drei den Axen der x, y und z parallelen Linien, die sich im Punkte m_1 schneiden, die diesem Punkte zugehörigen Hauptaxen sind, ausgedrückt durch die drei Gleichungen

$$S.m(x-x_1)(y-y_1) = 0, \quad S.m(x-x_1)(z-z_1) = 0,$$
$$S.m(y-y_1)(z-z_1) = 0.$$

Weil aber der Anfangspunkt der Coordinaten im Schwerpunkte des Körpers liegt, und demnach $S.mx = 0$, $S.my = 0$, $S.mz = 0$; so reducieren sich die obigen Gleichungen auf

$$S.mxy + Mx_1 y_1 = 0, \quad S.mxz + Mx_1 z_1 = 0,$$
$$S.myz + My_1 z_1 = 0.$$

Durch M bezeichnet man die Gesammtmasse des Körpers. Augenscheinlich sind die einzigen von x_1, y_1, z_1 verschiedenen Werthe der Coordinaten, die möglicherweise diesen Gleichungen Genüge leisten können, $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$. Es kann folglich meist nur einen einzigen Punkt m geben, für welchen die drei Hauptaxen den dem Punkte m_1 angehörigen parallel sind; die Lage dieses Punktes m ist so beschaffen, daß der Schwerpunkt des Körpers die Linie mm_1 in zwei gleiche Theile zerlegt.

§. 293. Die Aufgabe des vorigen §. läßt sich folgendermaßen lösen, wenn wir annehmen, daß die Axe der z mit einer der dem Schwerpunkt angehörenden Hauptaxen des Körpers zusammenfällt; alsdann fällt die Ebene der xy mit der Ebene zusammen, welche die beiden andern diesem Schwerpunkt angehörenden Hauptaxen enthält. Sobald man nun die Coordinaten x, y, z in andere a, b, c, die auf den oben bezeichneten Hauptaxen gezählt werden, verwandelt, und die Werthe der Coordinaten x, y, z,

$$x = a\cos.\theta + b\sin.\theta,\quad y = b\cos.\theta - a\sin.\theta,\quad z = c,$$

(welche man erhält, wenn man den zwischen der Axe der a und der der x liegenden Winkel θ nennt), in die drei obigen Gleichungen substituiert, wobei man berücksichtigen muß, daß $S.mab = 0$, $S.mac = 0$, $S.mbc = 0$; so erhält man

$$S.m(b^2 - a^2)\text{tang.}2\theta + M(b_1{}^2 - a_1{}^2)\text{tang.}2\theta + Ma_1 b_1 = 0,$$
$$M(a_1\cos.\theta + b_1\sin.\theta)c_1 = 0,\qquad M(b_1\cos.\theta - a_1\sin.\theta)c_1 = 0.$$

Wenn wir zunächst annehmen, daß der Punkt m_1, dessen Coordinaten a_1, b_1, c_1 sind, in der Ebene der ab liegt; so leisten wir damit den beiden letztern Gleichungen Genüge, weil $c_1 = 0$ ist; die erste, welche allein übrig bleibt, drückt die Beziehung, die zwischen den Coordinaten a_1 und b_1 bestehen muß, aus, damit die drei Hauptaxen, welche den durch diese Coordinaten bestimmten Punkten angehören, unter einander parallel sind. Augenscheinlich liegen zwei von diesen Axen in der Ebene der ab und die eine von ihnen bildet mit der Axe der a den Winkel θ; die dritte steht auf dieser Ebene senkrecht, der dem Schwerpunkte des Körpers zugehörigen Hauptaxe, die mit der Axe der c zusammenfällt, parallel.

Die obige Gleichung zwischen a_1 und b_1 ist die einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Axen der x und der y

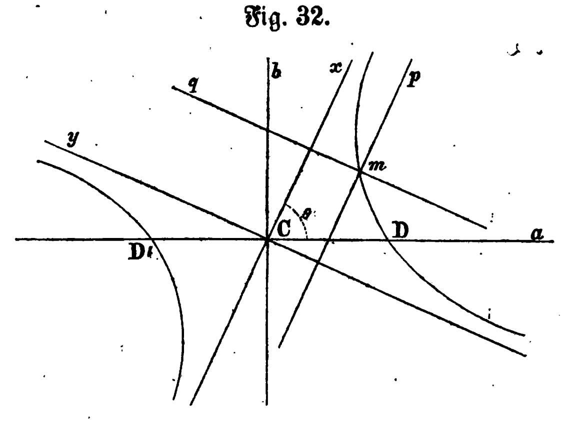
zu Asymptoten hat; es sind

$$\mp\sqrt{\frac{S\,.\,m(a^2-b^2)}{M}} \text{ und } \pm\sqrt{\frac{S\,.\,m(a^2-b^2)}{M}}$$

die Coordinaten der Punkte, in denen diese Curve die Axen der a_1 oder der b_1 schneidet. Der eine dieser Ausdrücke ist immer reell, der andere immer imaginär und sie sind von dem Werthe des Winkels θ unabhängig.

Diese Resultate lassen sich so veranschaulichen. Ist (Fig. 32) C der Schwerpunkt des vollen Körpers, Ca und

Fig. 32.



Cb zwei der diesem Schwerpunkte zugehörigen Hauptaxen, so daß das in Beziehung auf die Axe Ca genommene Trägheitsmoment größer ist, als das in Beziehung auf Cb genommene; wenn man ferner in der Ebene dieser beiden Axen einen beliebigen Punkt m annimmt und die beiden in dieser selben Ebene enthaltenen Hauptaxen mp und mq bestimmt, welche zu diesem Punkte gehören; wenn man dann durch den Schwerpunkt C die geraden Linien Cx und Cy parallel zu mp und mq zieht und endlich die durch den Punkt m hindurchgehende gleichseitige Hyperbel

construiert, deren Asymptoten diese Linien sind; so gehören allen in dieser Hyperbel liegenden Punkten derartige Hauptaxen an, daß alle drei den dem Punkt m angehörigen drei Hauptaxen parallel sind. Ferner schneiden alle so construierten Hyperbeln die Axe Ca in zwei Punkten D und D', deren Entfernung vom Schwerpunkte $C = \sqrt{\frac{A-B}{M}}$ ist; A und B sind die in Beziehung auf die Axen Ca und Cb genommenen Trägheitsmomente. Sobald diese beiden Trägheitsmomente einander gleich sind, reduciert sich die gleichseitige Hyperbel auf zwei gerade, auf einander senkrecht stehende Linien, deren eine den Punkt m mit dem Schwerpunkt C verbindet und welche die Richtungen der dem Punkt m angehörigen Hauptaxen bestimmen.

§. 294. Wenn ferner die drei in §. 292 gewählten Axen x, y und z mit den dem Schwerpunkte des Körpers angehörigen Hauptaxen zusammenfallen, und zugleich der Punkt m auf einer dieser Axen liegt; so ist alsdann $S.mxy = 0$, $S.mxz = 0$, $S.myz = 0$ und zwei der Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind $= 0$; so wird also den drei in §. 292 gegebenen Gleichungen, welche die Bedingung ausdrücken, daß die Axen der x, y und z den Hauptaxen parallel sein sollen, welche dem Punkte m angehören, Genüge geleistet. Folglich sind die allen Punkten der im Schwerpunkte eines Körpers sich schneidenden Hauptaxen angehörigen Hauptaxen jenen erstern parallel.

§. 295. Es kann endlich die Aufgabe gestellt werden, die Punkte in einem Körper, wenn es deren giebt, zu bestimmen, für welche alle sich in diesem Punkte schneidenden geraden Linien Hauptaxen sind: es müssen demnach die in Beziehung auf diese Linien genommenen Trägheitsmomente einander gleich sein. Wenn wir die Coordinatenaxen x, y, z in die dem Schwerpunkte des Körpers angehörigen Haupt-

axen hineinlegen, so hat man die Bedingungsgleichungen

$$S.mx = 0, \quad S.my = 0, \quad S.mz = 0,$$
$$S.mxy = 0, \quad S.mxz = 0, \quad S.myz = 0;$$

ferner, wenn man die in Beziehung auf die im Schwerpunkte sich schneidenden Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente A, B, C nennt

$$A = S.m(y^2 + z^2), \quad B = S.m(x^2 + z^2), \quad C = S.m(x^2 + y^2).$$

Sind nun die Linien, die parallel den erstgenannten Axen durch den Punkt hindurchgehen, dessen Coordinaten x', y' und z' sind, Hauptaxen; so ist

$$S.m(x - x')(y - y') = 0, \qquad S.m(x - x')(z - z') = 0,$$
$$S.m(y - y')(z - z') = 0.$$

Vermöge der obigen Bedingungsgleichungen reducieren sich diese Gleichungen auf folgende:

$$x'y' = 0, \quad x'z' = 0, \quad y'z' = 0.$$

Diesen kann nur dadurch Genüge geleistet werden, daß mindestens zwei von den Größen x', y', $z' = 0$ sind; man schließt daraus zunächst, daß die gesuchten Punkte, wenn es solche giebt, in einer der im Schwerpunkte sich schneidenden Hauptaxen liegen müssen.

Diese Punkte wollen wir in die Axe der x' verlegen, indem wir $y' = 0$, $z' = 0$ setzen. Bezeichnen wir dann die Trägheitsmomente, die in Beziehung auf drei durch einen dieser Punkte hindurchgehende und den im Schwerpunkte sich schneidenden Hauptaxen parallele Axen genommen sind, durch A', B', C'; so ist nach §. 289

$$A' = A, \quad B' = B + Mx'^2, \quad C' = C + Mx'^2,$$

oder weil die drei Trägheitsmomente A', B', C' einander gleich sein sollen

$$x'^2 = \frac{A - B}{M} = \frac{A - C}{M}.$$

Dergleichen Punkte, wie sie oben bestimmt sind, kann es also nur dann geben, wenn 1° die beiden Trägheitsmomente B und C einander gleich sind und wenn 2° A größer ist als B und C. In dem Falle, daß die beiden kleinern Trägheitsmomente, die in Beziehung auf die im Schwerpunkte sich schneidenden Hauptaxen genommen werden, einander gleich sind, liegen zwei Punkte, für welche alle sich in ihnen schneidenden Linien Hauptaxen sind, auf der Hauptaxe, in Beziehung auf die das Trägheitsmoment das größte ist, auf beiden Seiten des Schwerpunkts in einer Entfernung $x = \pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$.

Wenn die drei Momente A, B und C einander gleich sind; so ist der Schwerpunkt der einzige Punkt des Körpers, für welchen alle in ihm sich schneidenden Linien die den Hauptaxen zukommende Eigenthümlichkeit haben.

Berechnung der Trägheitsmomente.

§. 296. Die Berechnung des in Beziehung auf eine beliebige Axe genommenen Trägheitsmoments für ein System von materiellen Punkten, die einen vollen Körper bilden, ist in §. 289 auf die drei Trägheitsmomente zurückgeführt, welche in Beziehung auf die drei im Schwerpunkte sich schneidenden Hauptaxen genommen sind, von welchen nothwendigerweise das eine das kleinste Trägheitsmoment ist, das dem Körper überall zukommen kann. Uebrigens bietet die Berechnung des Werthes eines Trägheitsmoments, für welches $S.mr^2$ der allgemeine Ausdruck ist, wo m die Masse eines der materiellen Punkte des Systems, r die Entfernung dieses Punktes von der Axe bezeichnet, in Beziehung auf die das Moment genommen ist, keine Schwierigkeit dar. Wenn es sich nicht um ein System getrennter,

in bestimmten Entfernungen von einander liegender materieller Punkte, sondern um einen vollen, zusammenhängenden Körper handelt, so muß die durch S bezeichnete Summe durch ein bestimmtes Integral ersetzt werden, welches je nach der Wahl des Coordinatensystems verschiedene Formen annehmen kann. Wenn wir die rechtwinklichten Coordinaten beibehalten und durch ϱ der Werth der Masse für die Volumenseinheit des Stoffs, aus dem der Körper besteht, in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, bezeichnen; so ist offenbar

$$\int dx \int dy \int dz \,.\, \varrho(x^2+y^2)$$

der allgemeine Ausdruck für das in Beziehung auf die Axe der z genommene Trägheitsmoment. Die Grenzen des Integrals ergeben sich aus den der Oberfläche des Körpers angehörenden Coordinaten, wie §. 76 angegeben ist. Wir wollen durch einige Beispiele dies erläutern.

§. 297. In einem gleichartigen rechtwinklichten Parallelepipedum, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und dessen Kanten den Axen parallel sind, bezeichnen wir die Längen der halben Kanten mit a, b und c, welche den x, y und z parallel liegen: alsdann ist der Ausdruck für das in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt hindurchgehende und der Kante c parallele Axe genommene Trägheitsmoment

$$\varrho\int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy \int_{-c}^{c} dz(x^2+y^2) = \tfrac{8}{3}\varrho\, abc(a^2-b^2),$$

oder, wenn man die Gesammtmasse des Körpers durch M bezeichnet

$$\tfrac{1}{3}M(a^2-b^2).$$

Nimmt man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine der Kanten, c; so ist sein Werth

$$\tfrac{4}{3}M(a^2+b^2).$$

Augenscheinlich sind hier die drei durch den Schwerpunkt den Kanten parallel gelegten Axen die Hauptaxen; das der drei in Beziehung auf diese Axen genommenen Trägheitsmomente ist das größte, welches in Beziehung auf die der kleinsten Kante parallele Axe genommen ist; umgekehrt gehört das kleinste jener Trägheitsmomente der Axe an, welche der größten Kante parallel ist. Wenn ferner $2c$ die kleinste Kante ist und zugleich die beiden andern Kanten $2a$ und $2b$ einander gleich sind; so liegen in der Axe der z zwei solche Punkte, daß alle in ihnen sich schneidenden Linien Hauptaxen sind; nach §. 295 ist die Entfernung dieser Punkte vom Anfangspunkte der Coordinaten

$$z = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}(a^2 - c^2)}.$$

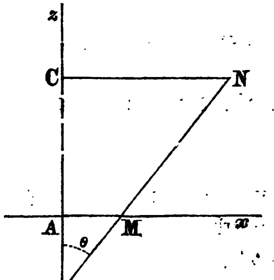
§. 298. Wenn in einem Rotationskörper die Axe mit der Axe der z zusammenfällt; so läßt sich das in Beziehung auf diese Axe genommene Trägheitsmoment durch das doppelte Integral ausdrücken

$$2\pi \int dx\, x^3 \int dz\,.\,\varrho \quad \text{oder} \quad 2\pi \int dz \int dx\,.\,\varrho x^3,$$

wo π das Verhältniß des Umfangs zum Durchmesser bezeichnet.

§. 299. Ist dieser Körper der durch das Trapez $AMNC$ beschriebene abgestumpfte Kegel (Fig. 33); so ist, wenn man AM, den Halbmesser der kleinern Grundfläche, durch a, den Centriwinkel durch θ bezeichnet,

Fig. 33



$$x = a + z\,\text{tang.}\,\theta$$

die Gleichung für die Seitenlinie MN. Ist ϱ hier constant angenommen; so erhalten

wir nach der obigen Formel, wenn wir die Höhe AC des abgestumpften Kegels c nennen:

$$2\pi\varrho\int_0^c dz\int_0^{a+z\,\text{tang.}\theta} dx\,.\,x^3$$

oder

$$\frac{\pi}{2}\varrho\int_0^c dz(a+z\,\text{tang.}\,\theta)^4 = \frac{\pi}{10}\varrho\,\frac{(a+c\,\text{tang.}\theta)^5-a^5}{\text{tang.}\,\theta}.$$

Man erhält daraus als Ausdruck für das Trägheitsmoment eines ganzen Kegels in Beziehung auf seine Axe, indem man $a=0$ setzt

$$\frac{\pi}{10}\varrho\,c^5\,\text{tang.}\,\theta^4.$$

Setzt man in demselben Ausdruck $\theta=0$, so erhält man

$$\frac{\pi}{2}\varrho\,a^4 c$$

als Ausdruck für das Trägheitsmoment eines geraden Cylinders in Beziehung auf seine Axe, wo a der Halbmesser der Basis, c die Höhe des Cylinders ist. Das Trägheitsmoment desselben Cylinders in Beziehung auf eine Seitenlinie genommen ist

$$\tfrac{3}{2}\pi\,.\,\varrho\,a^4 c.$$

§. 300. Für eine Kugel, deren Halbmesser $=a$, ist

$$x=\sqrt{a^2-z^2}.$$

Wird dieser Körper als durchaus gleichförmig angenommen, so erhalten wir aus der Formel des §. 298 folgenden Ausdruck für das in Beziehung auf den Durchmesser genommene Trägheitsmoment

$$2\pi\varrho\int_{-a}^{a} dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} dx\,.\,x^3,$$

oder

$$\frac{\pi}{2}\varrho\int_{-a}^{a} dz(a^4 - 2a^2z^2 + z^4) = \frac{8\pi}{15}\varrho a^5.$$

Statt dessen kann man $\frac{2}{5}Ma^2$ schreiben, wenn man die Masse der Kugel durch M bezeichnet. Das Trägheitsmoment der Kugel in Beziehung auf eine Tangente ist

$$\frac{28}{15}\pi\varrho a^5 = \frac{7}{5}Ma^2.$$

§. 301. Wir wollen endlich den Ausdruck für die Trägheitsmomente eines gleichförmigen Ellipsoids suchen, die in Beziehung auf die drei Axen dieses Körpers, offenbar die durch seinen Schwerpunkt hindurchgehenden Hauptaxen, genommen sind. Bezeichnet man die halben Axen desselben, deren Richtung mit der der x, y und z zusammenfallen möge, mit a, b und c, so daß der Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkt liegt; so ist die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

deshalb ist

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Aus der in §. 296 gegebenen Formel erhält man als Ausdruck für das in Beziehung auf die Axe der z genommene Trägheitsmoment, wenn man zunächst in Beziehung auf die z integriert:

$$2\varrho . c\int dx\int dy(x^2 + y^2)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Diese Formel läßt sich auch so schreiben

$$2\varrho . c\left\{\int dx . x^2\int dy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + \int dy . y^2\int dx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right\}$$

Es werden die Grenzen des Integrals

$$\int dy \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

durch die Werthe von y aus der Gleichung $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ für den Durchschnitt der Oberfläche des Ellipsoids mit der Ebene der xy, also durch $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ bestimmt.

Setzt man zur Abkürzung $r=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, so läßt sich dies Intregral auch so schreiben

$$\frac{1}{b}\int_{-r}^{r} dy\sqrt{r^2-y^2};$$

da die Größe $\int_{-r}^{r} dy\sqrt{r^2-y^2}$ der Fläche eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Halbkreises gleich ist, so ist der Werth dieses Integrals

$$\frac{\pi r^2}{2b}=\frac{\pi}{2}b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Demnach ist

$$\int dx . x^2\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{\pi}{2}b\int dx\left(x^2-\frac{x^4}{a^2}\right);$$

integriert man endlich in Beziehung auf x zwischen den Grenzen $-a$ und a, so erhält man

$$\int dx . x^2\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{2\pi}{15}a^3b.$$

Ebenso leitet man ab

$$\int dy . y^2\int dx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{2\pi}{15}ab^3.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment ist also

$$\frac{4\pi}{15}\varrho . abc(a^2+b^2).$$

18*

Da der Inhalt des Ellipsoids $= \frac{4\pi}{3} abc$ ist, so erhält man hiernach, indem man durch M die Gesammtmasse dieses Körpers bezeichnet, diese Werthe der in Beziehung auf die drei Axen $2a$, $2b$ und $2c$ genommenen Trägheitsmomente:

$$\tfrac{1}{5}M(b^2+c^2), \quad \tfrac{1}{5}M(a^2+c^2), \quad \tfrac{1}{5}M(a^2+b^2).$$

Wenn a die größte der Halbaxen ist, so ist ihr Trägheitsmoment $\frac{1}{5}M(b^2+c^2)$ das kleinste der drei obigen, folglich das kleinstmögliche für den Körper überhaupt. Wenn c die kleinste der Halbaxen ist, so ist ihr Trägheitsmoment $\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$ im Gegentheil das größte von jenen drei Trägheitsmomenten, folglich das größte in Beziehung auf alle durch den Schwerpunkt hindurchgehenden Linien. Wenn die Halbaxen a und b einander gleich sind, der Körper also ein Rotationsellipsoid ist; wenn zugleich die Halbaxe c, um welche die Umdrehung stattgefunden hat, kleiner als a und b ist, so daß das größte der Trägheitsmomente $\frac{2}{5}Ma^2$, die beiden andern $\frac{1}{5}M(a^2+c^2)$ sind; so giebt es nach §. 295 zwei auf beiden Seiten des Mittelpunkts auf der Umdrehungsaxe in der Entfernung $\sqrt{\frac{1}{5}(a^2-c^2)}$ von diesem Mittelpunkte liegende Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß alle durch sie hindurchgelegten geraden Linien Hauptaxen sind. *)

Bewegung eines schweren Körpers um eine feste horizontale Axe. Schwingungsmittelpunkt.

§. 302. Die Bewegung eines vollen, der Schwerkraft unterworfenen Körpers, der sich um eine feste Axe dreht,

*) Diese und viele andere Resultate sind in der Formel von Dirichlet enthalten, welche im Lehrb. der Diff. Rechn. Band **II**. Zusatz **III**. 3 enthalten ist.



muß der Differentialgleichung, die in §. 279 gegeben ist:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{S.Pp}{S.mr^2}$$

Genüge leisten. Ist (Fig. 34) AB der Schnitt einer durch diese Axe hindurchgelegten Vertikalebene, G die Lage des Schwerpunkts des Körpers am Ende der Zeit t; nennt man ferner θ den Winkel BAG, c die Entfernung AG und M die Gesammtmasse des Körpers: so ist

Fig. 34

$$v = -\frac{d\theta}{dt}, \quad S.Pp = Mgc\sin.\theta.$$

Demnach giebt jene obige Gleichung

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mgc}{S.mr^2}\sin.\theta.$$

Wenn man beide Glieder mit $d\theta$ multipliciert und dann integriert; so erhält man

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2Mgc}{S.mr^2}\cos.\theta + \text{Const.},$$

also, wenn man den anfänglichen Werth des Winkels θ durch Θ, den der Winkelgeschwindigkeit v durch V bezeichnet

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2 + \frac{2Mgc}{S.mr^2}(\cos.\theta - \cos.\Theta);$$

diese Gleichung in Beziehung auf dt aufgelöst und integriert, ergiebt die zwischen t und θ statthabende Beziehung, folglich die Beschaffenheit der Bewegung des Körpers.

§. 303. Die Gleichung der Bewegung eines einzigen in der Entfernung R von der Rotationsaxe liegenden Punktes ist

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2 + \frac{2G}{R}(\cos.\theta - \cos.\Theta),$$

wie leicht aus §. 168 abzuleiten ist. Vergleicht man diese Gleichung mit der vorigen; so erkennt man, daß ein voller,

schwerer Körper um eine feste horizontale Axe die nämliche Bewegung annimmt, welche ein materieller Punkt hat, der um diese Axe einen Kreis beschreibt mit dem Halbmesser

$$R = \frac{S.mr^2}{Mc}.$$

Ist Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers, das in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunkt hindurchgehende Parallele zu der festen Axe genommen ist; so ist nach §. 289 $S.mr^2 = M(c^2+k^2)$, folglich der Halbmesser

$$R = \frac{c^2+k^2}{c}.$$

Ein voller Körper von beliebiger Gestalt, der um eine Horizontalaxe Schwingungen macht, wird zusammengesetztes Pendel genannt im Gegensatze zu dem einfachen Pendel, das durch einen einzigen an einem masselosen Faden aufgehängten materiellen Punkt gebildet wird. Die Dauer der Schwingungen eines einfachen Pendels ist gleich der Dauer der Schwingungen eines zusammengesetzten Pendels, wenn für jenes die Länge des Fadens $= \frac{c^2+k^2}{c}$ ist.

§. 304. Mit dem Namen Schwingungsmittelpunkt bezeichnet man den Punkt eines um eine feste, horizontale Axe schwingenden Körpers, in welchem man die Gesammtmasse des Körpers concentriert denken könnte, ohne dadurch die Beschaffenheit und die Dauer der Schwingungen zu ändern. Aus dem obigen folgt, daß alle Punkte, welche in einer durch die feste Axe und durch den Schwerpunkt hindurchgehenden Ebene in der Entfernung $\frac{c^2+k^2}{c}$ von der festen Axe liegen, jene Eigenschaft haben.

Zwischen dem Schwingungscentrum und dem Aufhängepunkte des Pendels besteht die Beziehung, daß wenn jenes Aufhängepunkt des Pendels wird, dieser umgekehrt wieder Schwingungscentrum werden muß. Da nämlich die Ent=

fernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkte $= \frac{c^2+k^2}{c} - c$ oder $\frac{k^2}{c}$ ist; so haben wir nach der vorigen Formel, wenn der Schwingungsmittelpunkt zum Aufhängepunkt gemacht wird

$$\frac{\frac{k^4}{c^2}+k^2}{\frac{k^2}{c}} = \frac{k^2+c^2}{c}.$$

§. 305. Es giebt ferner in einem vollen Körper unendlich viel gerade Linien, welche die Eigenschaft haben, daß, wenn sie als Schwingungsaxen genommen werden, die Dauer der Schwingungen des Körpers für alle dieselbe ist. Wenn wir durch α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche eine parallel mit der festen Axe durch den Schwerpunkt des Körpers hindurchgelegte Linie mit den drei Hauptaxen einschließt, welche sich in dem Schwerpunkte schneiden, und die drei in Beziehung auf diese Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente A, B, C nennen; so ist nach §. 287

$$Mk^2 = A\cos.\alpha^2 + B\cos.\beta^2 + C\cos.\gamma^2;$$

folglich ist die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungen dieselbe Dauer haben, wie die des gegebenen Körpers:

$$\frac{A\cos.\alpha^2 + B\cos.\beta^2 + C\cos.\gamma^2 + Mc^2}{Mc}.$$

Die Werthe der Größen α, β, γ können auf unendlich vielfach verschiedene Art geändert werden, ohne daß der Werth dieses Ausdrucks sich änderte.

Ist A das kleinste der Trägheitsmomente A, B, C; so ist, wenn die Länge c constant bleibt, der kleinste Werth dieser Formel

$$\frac{A+Mc^2}{Mc};$$

dieser letzte Ausdruck wird ein Minimum für $c = \sqrt{\frac{A}{M}}$.
Demnach ist die Dauer der Schwingungen eines vollen Körpers dann die kleinstmögliche, wenn die feste Axe, um welche der Körper oscilliert, derjenigen der im Schwerpunkte sich schneidenden Hauptaxen parallel ist, zu welcher das kleinste Trägheitsmoment gehört, und wenn dieselbe von dieser Hauptaxe um die Größe $\sqrt{\frac{A}{M}}$ entfernt ist, wo A jenes kleinste Trägheitsmoment bezeichnet. Die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungen dieselbe Dauer haben, ist $2\sqrt{\frac{A}{M}}$.

Durch einen Stoß hervorgebrachte Bewegung eines vollen Körpers um eine feste Axe. Mittelpunkt des Stoßes.

§. 306. Die Bewegung eines vollen Körpers, der gezwungen ist sich um eine feste Axe zu drehen, wie in §. 277 u. ff. (diese Axe möge mit der Axe der x zusammenfallend angenommen werden), ist bestimmt durch die in §. 279 gegebene Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{S.Pp}{S.mr^2};$$

hier ist v die Winkelgeschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit t, $S.Pp$ die Summe der Momente der auf den Körper wirkenden Kräfte, die in Beziehung auf die feste Axe genommen sind, und $S.mr^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf dieselbe Axe genommen. Integriert giebt diese Gleichung die Beschaffenheit der Bewegung des Körpers, wenn man seine anfängliche Lage und Geschwindigkeit kennt.

Wir wollen uns hier die Aufgabe stellen die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche der Körper durch einen

augenblicklichen Stoß erhält, vom Zustande der Ruhe ausgehend, und den Druck, den die feste Axe in dem Augenblick erleidet, wo der Stoß eintritt.

Wir verstehen unter Stoß einen sehr großen Druck, der während einer sehr kleinen Zeit auf die Oberfläche des als ruhend angenommenen Körpers wirkt. Diesen, beständigen oder mit der Zeit veränderlichen, Druck wollen wir in Gewichtseinheiten gegeben denken und durch F, die sehr kurze Zeit, während welcher er wirkt, durch τ bezeichnen. Wenn der Druck F gegen einen materiellen Punkt von der Masse m wirkt, welcher ihm frei nachgiebt; so ist, wenn man durch u die Geschwindigkeit bezeichnet, welche der Punkt am Ende der Zeit t erlangt hat, $m\frac{du}{dt}=F$, folglich $mdu=Fdt$ und am Ende der Zeit τ, $mu=\int_0^\tau Fdt.$ Dies Integral stellt augenscheinlich die Größe der Bewegung dar, welche durch die Einwirkung des Stoßes hervorgebracht werden kann und ist das Maß dieser Einwirkung. Schreiben wir zur Abkürzung $\int_0^\tau Fdt=\Phi$; so ist Φ die Größe der Bewegung, welche diese Einwirkung nach Richtung des Stoßes F ertheilt und wird allgemein durch das Product einer Masse in eine Geschwindigkeit ausgedrückt. In Beziehung auf die hier gegebenen Begriffe vergl. §. 258.

Ein solcher Stoß wird oft dadurch hervorgebracht, daß ein Körper in Bewegung gegen den Körper anstößt, dessen Bewegung uns beschäftigt. Durch Einwirkung dieses Zusammenstoßens wird offenbar dann jedem der beiden Körper eine gewisse Größe der Bewegung nach entgegengesetzten Seiten und nach Richtung der beiden Oberflächen gemeinsamen Normale, die durch den Berührungspunkt

derselben hindurchgeht, ertheilt. Man kann demnach die Einwirkung eines Stoßes auf einen Körper so darstellen, daß man sagt, demselben werde eine Größe der Bewegung Φ in gegebener Richtung in einem bestimmten Punkte seiner Oberfläche ertheilt. Der genaue Werth von Φ läßt sich in jedem derartigen Falle nur durch eine besondere Auflösung erkennen. Vergl. Abschnitt XIX.

Einen Stoß von bestimmter Größe kann man am einfachsten dadurch hervorbringen, daß man gegen den ruhenden Körper einen andern stoßen läßt, der die Masse m und die Geschwindigkeit V hat, wenn nur nach dem Stoße die beiden Körper, die natürlich völlig unelastisch sein müssen, sich nicht trennen, sondern neben einander bleibend ein einziges körperliches System bilden. Dies System hat alsdann den Stoß $\Phi = mV$ erhalten und man kann nun, wie in Folgendem geschehen soll, die unmittelbar nach dem Stoße statthabende Bewegung bestimmen. Man muß den Stoß Φ so ansehen, als ob er auf den Schwerpunkt des zweiten Körpers wirkte und zwar nach der Richtung, nach welcher sich der Schwerpunkt desselben bewegt.

Wir wollen in Folgendem bezeichnen:

durch Φ die Größe der Bewegung, welche die den Stoß hervorbringende Kraft ertheilt;

durch ξ, η, ζ die Coordinaten des Punkts, auf welchen diese Kraft wirkt;

durch α, β, γ die Winkel, die die Richtung der Kraft mit den Axen der x, y, z einschließt;

durch ϖ die kürzeste Entfernung der Richtung der Kraft von der Axe der x, mit welcher die feste Axe zusammenfällt, um welche der Körper sich zu drehen gezwungen ist;

durch V die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper anfängt sich unter Einwirkung des Stoßes um die feste Axe zu drehen.

In §. 258 ist nachgewiesen, daß die vom Körper angenommene Größe der Bewegung der ihm ertheilten Größe der Bewegung um die feste Axe das Gleichgewicht halten muß. So folgt hier, wie in §. 277 und 279 die Gleichung

$$V.S.mr^2 = \Phi(\zeta \cos.\beta - \eta \cos.\gamma) = \Phi \varpi \sin.\alpha.$$

$S.mr^2$ bezeichnet stets das Trägheitsmoment des vollen Körpers, das in Beziehung auf die feste Axe genommen ist. Der aus dieser Gleichung abgeleitete Werth von V ist.

$$V = \frac{\Phi(\zeta \cos.\beta - \eta \cos.\gamma)}{S.mr^2} = \frac{\Phi \varpi \sin.\alpha}{S.mr^2};$$

dies ist die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, welche man dem Körper zuschreiben muß, um daraus die Bewegung zu bestimmen, welche er nach dem Stoße annimmt.

§. 307. In Beziehung auf den gegen die feste Axe in dem Augenblicke geübten Druck, in welchem der Stoß eintritt — und es ist für die praktische Anwendung von Wichtigkeit ihn festzustellen —, erkennt man gleichfalls aus §. 277 u. ff:

1) daß ein Druck $= \Phi \cos.\alpha$ der festen Axe parallel auf die Stützpunkte wirkt, die sich dem Herabgleiten des Körpers nach Richtung dieser Axe widersetzen;

2) daß senkrecht gegen die feste Axe nach Richtung der y ein Druck wirkt, dessen Werth ist

$$\Phi \cos.\beta - V.S.mz,$$

und für den die Summe der in Beziehung auf die Axe der x genommenen Momente den Werth hat

$$\Phi \xi \cos.\beta - V.S.mxz;$$

3) daß endlich senkrecht gegen die feste Axe nach Richtung der z ein Druck wirkt im Gesammtwerthe von

$$\Phi \cos.\gamma + V.S.my,$$

für den die Summe der in Beziehung auf die Axe der x genommenen Momente den Werth hat

$$\Phi\xi \cos.\gamma + V.S.mxy.$$

§. 308. Wenn der gegen die feste Axe geübte Gesammtdruck $= 0$ sein soll; so muß man demnach zuerst $\cos.\alpha = 0$ setzen, damit der parallel zu dieser Axe wirkende Druck $= 0$ sei; die Richtung des Stoßes muß also auf der festen Axe senkrecht stehen. Ferner muß man den Gleichungen Genüge leisten

$$\cos.\beta - \frac{\varpi.S.mz}{S.mr^2} = 0, \quad \cos.\gamma + \frac{\varpi.S.my}{S.mr^2} = 0;$$

daraus folgt, weil $\cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$,

$$\frac{\cos.\gamma}{\cos.\beta} = -\frac{S.my}{S.mz} \quad \text{und} \quad \varpi = \frac{S.mr^2}{\sqrt{(S.my)^2 + (S.mz)^2}} = \frac{S.mr^2}{Mc},$$

wo, wie in §. 302 die Gesammtmasse des Körpers durch M, die Entfernung seines Schwerpunktes von der festen Axe durch c bezeichnet ist. Es folgt daraus, 1⁰ daß die Richtung des Stoßes senkrecht auf der durch die feste Axe und den Schwerpunkt des Körpers hindurchgelegten Ebene stehen muß; 2⁰ daß die Entfernung der Richtung des Stoßes von der festen Axe gleich sein muß dem in Beziehung auf die feste Axe des Körpers genommenen Trägheitsmomente, dividiert durch das Product aus der Masse des Körpers in die Entfernung seines Schwerpunktes von der festen Axe.

Hieraus, daß man die Summe des auf die feste Axe wirkenden Drucks $= 0$ gesetzt hat, folgt mit Nothwendigkeit noch keineswegs, daß diese Axe nun keinerlei Einwirkung erleidet, weil es ja sein könnte, daß durch den Druck Kräftepaare gebildet würden. Wenn also die feste Axe im Augenblicke des Stoßes weder durch eine Kraft, noch durch ein Kräftepaar angegriffen werden soll; so muß man ferner setzen

$$\xi \cos.\beta - \frac{\varpi . S.mxz}{S.mr^2} = 0, \quad \xi \cos.\gamma + \frac{\varpi . S.mxy}{S.mr^2} = 0,$$

oder wenn man die aus den voranstehenden Gleichungen für $\cos.\beta$ und $\cos.\gamma$ abgeleiteten Werthe schreibt

$$\xi . S.mz - S.mxz = 0, \quad \xi . S.my - S.mxy = 0;$$

und folglich

$$\xi = \frac{S.mxz}{S.mz} = \frac{S.mxy}{S.my}.$$

Im allgemeinen kann man dieser Doppelgleichung nur dadurch Genüge leisten, daß man zugleich die Größen $S.mxy$, $S.mxz$ und $\xi = 0$ setzt: demnach muß die feste Axe eine der Hauptaxen des Körpers sein, welche sich in dem Punkte schneiden, in dem diese Axe die die Richtung des Stoßes enthaltende Ebene trifft. Wird sowohl diesen, als auch den oben erwähnten Bedingungen Genüge geleistet; so wirkt in dem Augenblick, in welchem der Stoß ertheilt wird, keinerlei Kraft auf die feste Axe.

§. 309. Mit dem Namen Centrum des Stoßes benennt man in einem Körper, der sich um eine feste Axe dreht, einen solchen Punkt, daß eine in diesem Punkte nach der der Richtung seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung wirkende Kraft die Bewegung des Körpers völlig so aufhebt, daß die feste Axe im Augenblicke dieser Aufhebung keinerlei Druck erleidet. Aus dem Vorangehenden ersieht man leicht, daß das Centrum des Stoßes in der Ebene liegt, welche die feste Axe und den Schwerpunkt enthält und zwar in der Entfernung $= \frac{S.mr^2}{M.c}$ von der festen Axe. Um den Bedingungen völlig Genüge zu leisten, muß die feste Axe eine Hauptaxe sein: wenn dies der Fall ist, liegt das Centrum des Stoßes in der Linie, in der sich die Ebene der beiden andern Hauptaxen und die die feste Axe und den Schwerpunkt des Körpers enthaltende schneiden. Aus §. 304 erkennt man, daß die Entfernung des Mittelpunkts

des Stoßes von der festen Axe der des Schwingungsmittelpunkts von derselben Axe gleich ist; trotzdem sind dies zwei Punkte, deren mechanische Eigenschaften gänzlich verschieden sind und sie dürfen deshalb nicht mit einander verwechselt werden.

§. 310. Wenn der Körper durch eine auf der festen Axe senkrechte Ebene in zwei gleiche und symmetrische Theile zerlegt werden kann; so ist die feste Axe eine der Hauptaxen, die dem Punkte angehören, in welchem sie die Ebene schneidet; in derselben Ebene liegt außerdem der Schwerpunkt des Körpers. Ein Stoß gegen den Körper übt demnach keinen Druck auf die feste Axe, wenn die Richtung des Stoßes in jener Ebene liegt, wenn sie senkrecht auf dem vom Schwerpunkt auf die feste Axe gefällten Lothe steht und dieses Loth in der Entfernung $\frac{S.mr^2}{M.c}$ von der festen Axe schneidet.

§. 311. Wenn einem vollen Körper, der gezwungen ist sich um eine feste Axe zu drehen, ein Stoß ertheilt ist, in Folge dessen er anfängt sich mit der Winkelgeschwindigkeit V, die aus der Gleichung in §. 306 bekannt ist, zu bewegen; so ist die Bewegung, die er ferner erhält, wie gleichfalls in §. 306 erwähnt ist, bestimmt durch die Gleichung $\frac{dv}{dt} = \frac{S.Pp}{S.mr^2}$, die sich auf $\frac{dv}{dt} = 0$ reduciert, wenn keine Kraft auf den Körper wirkt, der alsdann beständig die ihm ertheilte Winkelgeschwindigkeit V behält. Während dieser Bewegung erleidet die feste Axe den Druck, dessen Werth in §. 280 bestimmt ist, wenn der Körper der Einwirkung von Kräften unterliegt; oder allein den in §. 282 bestimmten Druck, den die Centrifugalkraft der Theile des Körpers auf sie ausübt. Man muß genau zwischen diesem stetigen Druck und dem augenblicklichen, für welchen die Ausdrücke

in §. 307 gegeben sind, unterscheiden; man erkennt leicht, daß die Bedingungen, die den aus der Centrifugalkraft hervorgehenden Druck $= 0$ machen, nie mit denen in Uebereinstimmung gebracht werden können, welche den aus einem Stoße hervorgehenden Druck $= 0$ machen; daß also eine feste Axe nie so liegen kann, daß sie diesen beiden Bedingungen Genüge leisten könnte.

XXI. Bewegung eines völlig freien Körpers im Raume.

§. 312. Indem wir einen vollen Körper als eine Verbindung materieller Punkte von gegen einander unveränderlicher Lage ansehen, bezeichnen wir durch

m die Masse eines der materiellen Punkte;

x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunkts des Körpers am Ende der Zeit t auf drei festen rechtwinklichten Axen gezählt;

x, y, z die Coordinaten des materiellen Punkts am Ende der Zeit t von diesem Schwerpunkt aus auf drei rechtwinklichten, den drei vorigen Axen resp. parallelen Axen gezählt;

X, Y, Z die in Gewichtseinheiten gegebenen Werthe der auf den Punkt bezüglich nach Richtung der Axen der x, der y und der z wirkenden Kräfte.

Die Coordinaten der materiellen Punkte des Systems von dem festen Anfangspunkte der Coordinaten x_1, y_1, z_1 aus gezählt sind am Ende der Zeit t, $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$: demnach sind die durch diese materiellen Punkte nach Richtung jeder Axe verlorenen Kräfte

$$X - m\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2}.$$

Da nun die Bewegung des Körpers derartig ist, daß sich diese verlorenen Kräfte beständig das Gleichgewicht halten müssen; so erhalten wir mit Anwendung der in §. 54 gegebenen Gleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts der auf einen vollen, völlig freien Körper wirkenden Kräfte ausdrücken, folgende sechs Gleichungen:

$$S.\left(X - m\,\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

$$S.\left(Y - m\,\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

$$S.\left(Z - m\,\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2}\right) = 0,$$

$$S.\left(X - m\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}\right)(y_1 + y) - S.\left(Y - m\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2}\right)(x_1 + x) = 0,$$

$$S.\left(Z - m\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2}\right)(x_1 + x) - S.\left(X - m\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}\right)(z_1 + z) = 0,$$

$$S.\left(Y - m\frac{d^2y_1 + dy^2}{dt^2}\right)(z_1 + z) - S.\left(Z - m\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2}\right)(y_1 + y) = 0.$$

Wegen der Eigenschaften des Schwerpunkts ist

$$S.mx = 0, \quad S.my = 0, \quad S.mz = 0;$$

hiernach reducieren sich die drei ersten Gleichungen (außerdem hat man in Beziehung auf die Lage der materiellen Punkte zu einander x_1, y_1 und z_1 als constante Größen anzusehen) auf

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_1}{dt^2} &= S.X, \\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} &= S.Y, \\ M\frac{d^2z_1}{dt^2} &= S.Z, \end{aligned}\right\}(1)$$

M bezeichnet die Gesammtmasse des Körpers. Die drei letzten jener sechs Gleichungen reducieren sich in Folge dieser Gleichungen auf

$$\left.\begin{aligned} S.m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=S.(Xy-Yx),\\ S.m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=S.(Zx-Xz),\\ S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=S.(Yz-Zy). \end{aligned}\right\}(2)$$

Die linke Seite der Gleichungen (1) enthält nur die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Schwerpunkts des Körpers. Diese Gleichungen enthalten also das Gesetz der Bewegung des Schwerpunkts und eine Vergleichung derselben mit den in §. **141** gegebenen Gleichungen zeigt, daß der Schwerpunkt des Körpers sich so im Raume bewegt, als ob in ihm die ganze Masse des Körpers concentriert wäre und als ob auf ihn alle Kräfte je nach ihrer Richtung wirkten. Gewöhnlich enthalten freilich die Ausdrücke für die Kräfte X, Y und Z die Coordinaten x_1+x, y_1+y, z_1+z der verschiedenen materiellen Punkte und dann ist die Bewegung des Schwerpunkts von den Bewegungen der verschiedenen Theile des Körpers in Beziehung auf diesen Schwerpunkt abhängig. Wenn aber die Werthe der Kräfte X, Y, Z von den Coordinaten x, y, z unabhängig sind, oder wenigstens ohne merklichen Irrthum als unabhängig angesehen werden dürfen (wie dies bei den Körpern der Fall ist, die der Einwirkung der Schwerkraft unterworfen sind); so bestimmen die Gleichungen (1) völlig die Bewegung des Schwerpunktes.

Die linke Seite der Gleichungen (2) enthält nur die Coordinaten x, y und z der verschiedenen Punkte des Körpers, welche vom Schwerpunkt aus gezählt sind. Aus diesen Gleichungen erkennt man also die Bewegungen der Theile des Körpers um diesen Schwerpunkt. Aus ihnen geht hervor, daß, wenn man allein die Bewegungen der Theile des Körpers in Beziehung auf den Schwerpunkt

ins Auge faßt, die verlorenen Kräfte sich ebenso das Gleichgewicht halten, wie dies der Fall ist, wenn derselbe in fester Lage erhalten wird. Wenn die Ausdrücke für die Kräfte X, Y, Z von der Lage des Schwerpunkts unabhängig sind oder aus den genannten Gleichungen verschwinden; so läßt sich aus ihnen die Bewegung des Körpers um den Schwerpunkt völlig unabhängig von der absoluten Bewegung dieses Punkts erkennen.

§. 313. Wenn keine Kraft auf die Punkte des vollen Körpers wirkt, so reducieren sich die Gleichungen (1) auf

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=0, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=0, \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=0;$$

sie zeigen nach §. 142 an, daß der Schwerpunkt des Körpers sich alsdann geradlinig mit constanter Geschwindigkeit bewegt. Diese Bewegung des Schwerpunkts erleidet keine Aenderung, wenn auch etwa die Theile des Körpers sich um denselben in Folge des ersten Stoßes, der ihm ertheilt ist, drehen sollten.

§. 314. Wenn auf die Punkte des vollen Körpers keine Kraft wirkt oder wenn die Resultierende der auf ihn wirkenden Kräfte beständig durch den Schwerpunkt hindurchgeht (wie es bei den der Einwirkung der Schwerkraft unterliegenden Körpern der Fall ist); so reducieren sich die Gleichungen (2) auf

$$S.m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

$$S.m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

$$S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0;$$

diese lassen sich auch so schreiben

$$S.m\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right)=0,$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)=0.$$

Folglich geben sie, wenn man integriert

$$S.m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=\nu,$$

$$S.m\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right)=\mu,$$

$$S.m\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)=\lambda,$$

wo ν, μ und λ drei Constanten bezeichnen.

Da $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ die den Axen parallelen Componierenden der Größen der Bewegung sind, die jedem der materiellen Punkte am Ende der Zeit t in Beziehung auf den Schwerpunkt ertheilt sind; da man zugleich annehmen darf, daß diesen Größen der Bewegung entsprechende Kräfte auf die Theile des Körpers wirken, und diese nach Cap. IV zusammensetzen kann: so ergiebt sich, daß die linke Seite der obigen Gleichungen die Momente der in den Ebenen der xy, der xz und der yz wirkenden Kräftepaare darstellt; diese geben das Maß der genannten Kräfte in Beziehung auf die Drehung des vollen Körpers um die Axen der z, der y und der x; augenscheinlich haben laut jenen Gleichungen diese Momente stets constante Werthe. Das Moment des resultierenden Paares, dessen Werth wir durch Σ bezeichnen wollen, behält gleichfalls einen constanten Werth, da

$$\Sigma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2};$$

ebenso auch die Winkel, welche die Axe dieses Kräftepaares

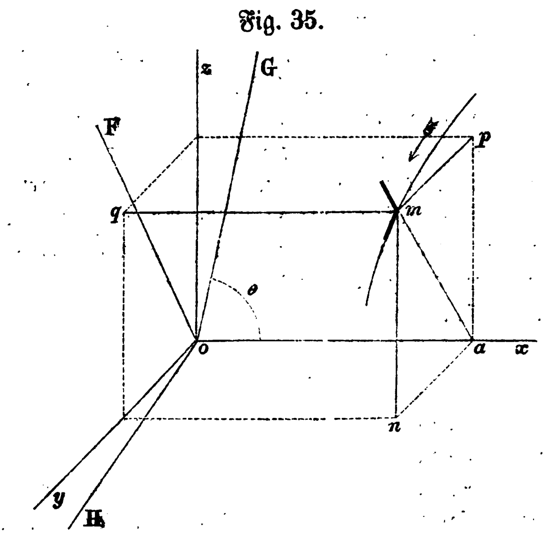
mit den Axen der x, y, z bildet, da deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{\lambda}{\Sigma}, \quad \frac{\mu}{\Sigma}, \quad \frac{\nu}{\Sigma}.$$

§. 315. Wie in §. 249 nachgewiesen ist, kann man, welche Bewegung auch ein Körper in Beziehung auf seinen Schwerpunkt hat, die durch Einwirkung dieser relativen Bewegung in jedem unendlich kleinen Zeitraume dt eintretende Verschiebung so ansehen, als würde sie durch Rotation des Körpers um eine durch den Schwerpunkt hindurchgehende Linie hervorgebracht. Die Lage dieser Linie ändert sich gewöhnlich mit der Zeit und man nennt sie aus diesem Grunde augenblickliche Rotationsaxe oder einfacher augenblickliche Axe. Diese augenblickliche Rotationsaxe dreht sich selbst um den Schwerpunkt und nimmt gegen die festen Coordinatenebenen verschiedene Neigungen an.

Durch eine Figur läßt sich dieses leichter veranschaulichen. Indem wir der größern Einfachheit halber in einem bestimmten Augenblicke die augenblickliche Axe mit der Axe der x zusammenfallend annehmen, um welche sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit v dreht: so nehmen wir (in Fig. 35) m als einen der materiellen Punkte des vollen Körpers an; mq, mp und mn sind die drei Coordinaten x, y, z dieses Punktes und ma ist gleich seiner Entfernung r von der Axe der x. Der Punkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit vr nach Richtung des vom Punkte a aus mit dem Halbmesser am oder r beschriebenen Kreises in der senkrecht auf der Axe der x stehenden Ebene nmp. Diese Größe der Bewegung mvr, die dem materiellen Punkte nach Richtung des gedachten Bogens ertheilt ist, muß mit den entsprechenden Größen der Bewegung, die den übrigen Punkten des Körpers ertheilt sind, componiert werden. Verfährt man auf die in Cap. IV angegebene Art,

Fig. 35.



daß man zunächst diese Größen der Bewegung in andere nach Richtung der Coordinatenaxen wirkende zerlegt; so erhält man (da nach Richtung der x die Componierende der Größe der Bewegung $= 0$, nach Richtung der $y = mvr\frac{z}{r}$ oder mvz, nach Richtung der $z = -mvr\frac{y}{r}$ oder $-mvy$ ist) als Resultat dieser ersten Zusammensetzung folgende Ausdrücke für die drei im Anfangspunkte der Coordinaten nach Richtung der drei Axen hin wirkenden partiellen Resultierenden

$$0, \quad v.S.mz, \quad -v.S.my;$$

weil der Anfangspunkt der Coordinaten im Schwerpunkte des Körpers liegt, sind diese Resultierenden alle drei $= 0$. Man erhält zweitens

$$-v.S.mxz, \quad -v.S.mxy, \quad v.S.m(y^2+z^2)$$

als Ausdruck für die Momente der drei in den Ebenen der xy, der xz und der yz wirkenden Paare, welche also

resp. in Beziehung auf die Axen der z, der y und der x genommen sind. Die beiden ersten dieser Kräftepaare sind augenscheinlich $= 0$ in dem besondern Falle, daß die augenblickliche Rotationsaxe mit einer der dem Schwerpunkt des Körpers angehörenden Hauptaxen zusammenfällt.

Setzt man die beiden ersten Kräftepaare, deren Axen oz und oy sind, zusammen; so ist die Axe des resultierenden Paares eine in der Ebene der yz liegende Linie oF, welche mit der Axe der y den Winkel Foy einschließt, dessen trigonometrische Tangente ist

$$\frac{S.mxy}{S.mxz}.$$

Wenn man dann dies resultierende Kräftepaar mit dem dritten zusammensetzt, dessen Moment $= v.S.m(y^2+x^2)$ oder $v.S.mr^2$, dessen Axe ox ist; so ist die Axe des resultierenden Gesammtpaares eine in der Ebene der Linien oF und ox enthaltene gerade Linie oG. Dies resultierende Gesammtpaar ist es, dessen Moment wir im vorigen §. mit Σ bezeichnet haben, dessen Größe und Richtung nothwendig während der ganzen Dauer der Bewegung des Körpers constant bleiben.

Wenn man folglich den Winkel, der in einem gegebenen Augenblicke zwischen der Axe oG des Paares, das aus den Größen der Bewegung, welche den Theilen des Körpers ertheilt sind, resultiert, und der augenblicklichen Rotationsaxe ox liegt, durch θ bezeichnet; so ist 1⁰

$$\Sigma.\cos.\theta = v.S.mr^2$$

das Moment des componierenden Paares, dessen Axe mit der augenblicklichen Rotationsaxe zusammenfällt; wie man sieht, ist dies Moment gleich dem Producte der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des Körpers, das in Beziehung auf diese augenblickliche Axe genommen ist;

2° ist

$$\Sigma . \sin . \theta = v \sqrt{(S . mxz)^2 + (S . mxy)^2}$$

das Moment des componierenden Paares, dessen Axe oF senkrecht auf der augenblicklichen Axe ox steht und in der durch diese und die Axe oG des resultierenden Paares hindurchgelegten Ebene liegt.

§. 316. Wir müssen jetzt die Centrifugalkraft in Untersuchung ziehen, welche auf die Theile des Körpers wirkt und nach §. 282 und ff. gewöhnlich die augenblickliche Rotationsaxe zu verschieben strebt. Die auf den Punkt m wirkende Centrifugalkraft mv^2r wirkt nach Richtung der Verlängerung des Halbmessers am; ebenso, wie in §. 282, folgt, daß ihre Componierende nach Richtung der Axe der x $= 0$, nach Richtung der Axe der $y = mv^2 r \frac{y}{r}$ oder $mv^2 y$ und nach Richtung der Axe der $z = mv^2 r \frac{z}{r}$ oder $mv^2 z$ ist. Indem wir alle den materiellen Punkten angehörenden Centrifugalkräfte zusammensetzen, erhalten wir zunächst

$$0, \quad v^2 . S . my, \quad v^2 . S . mz,$$

als die drei partiellen Resultierenden, die nach Richtung der drei Axen auf den Anfangspunkt der Coordinaten wirken und die Werthe dieser Resultierenden sind $= 0$. Ferner sind

$$- v^2 . S . mxy, \quad v^2 . S . mxz, \quad 0$$

die Ausdrücke für die Momente der drei Kräftepaare, deren Axen bezüglich die Axen der z, der y und der x sind.

Durch Zusammensetzung der beiden ersten Paare erhält man demnach das resultierende Gesammtpaar, das aus den Centrifugalkräften hervorgeht; die Axe dieses Paares ist eine Linie oH, welche in der Ebene der yz liegt und mit der Axe der y den Winkel Hoy bildet, dessen trigonometrische Tangente ist

$$-\frac{S.mxz}{S.mxy}.$$

Wenn man dies Resultat mit dem im vorigen §. abgeleiteten zusammenstellt; so ergiebt sich 1⁰, daß das aus den Centrifugalkräften hervorgehende resultierende Paar zur Axe eine Linie hat, welche auf der Ebene senkrecht steht, die durch die augenblickliche Rotationsaxe ox und durch die Axe oG des Kräftepaares, das aus den den Theilen des Körpers ertheilten Größen der Bewegung resultiert, hindurchgeht; oder daß das resultierende Kräftepaar, welches aus den Centrifugalkräften hervorgeht, immer in der durch die beiden Axen ox und oG hindurchgehenden Ebene wirkt; 2⁰, daß der Ausdruck für das Moment des aus den Einwirkungen der Centrifugalkräfte resultierenden Paares ist

$$v^2\sqrt{(S.mxy)^2+(S.mxz)^2}=v.\Sigma.\sin.\theta.$$

Bewegung eines freien, vollen Körpers im Raume in Folge eines Stoßes.

§. 317. Wenn wir annehmen, daß ein voller, ruhender, im Raume völlig freier Körper plötzlich einen Stoß erhält, den wir, wie §. 306 nachgewiesen ist, stets in der Weise wirkend denken können, daß dem Körper in einem seiner Punkte nach einer gegebenen Richtung hin eine bestimmte Größe der Bewegung ertheilt wird; so ist die uns vorliegende Aufgabe die Bewegung zu bestimmen, die der Körper durch Einwirkung dieses Stoßes erhält.

In §. 258 ist nachgewiesen, daß die Größen der Bewegung, die die verschiedenen Theile des Körpers erlangen, den ihnen ertheilten Größen der Bewegung, wenn diese nach entgegengesetzter Richtung genommen werden, das Gleichgewicht halten müssen: mit Hülfe dieses Satzes können wir unsere Aufgabe lösen.

Indem wir uns den Körper in der Lage denken, welche er in dem Augenblicke, in dem der Stoß ertheilt wird, einnimmt; und annehmen, daß die Axen der x, y und z durch seinen Schwerpunkt hindurchgehn: so wollen wir bezeichnen durch

m die Masse des in dem Punkte liegenden materiellen Theils des vollen Körpers, dessen Coordinaten x, y, z sind;

U_1, V_1, W_1 die absoluten Geschwindigkeiten des Schwerpunkts des Körpers, welche durch Einwirkung des Stoßes nach Richtung der x, y und z ertheilt werden;

$U_1 + U$, $V_1 + V$, $W_1 + W$ die absoluten Geschwindigkeiten des materiellen Punkts, dessen Coordinaten x, y, z sind; diese sind gleichfalls durch Einwirkung des Stoßes nach denselben Richtungen hervorgebracht, so daß U, V, W die Geschwindigkeiten sind, die aus der Bewegung des Körpers um seinen als fest angesehenen Schwerpunkt hervorgehen;

Φ die Größe der Bewegung, welche durch die den Stoß verursachende Kraft ertheilt wird;

ξ, η, ζ die Coordinaten des Punkts des Körpers, auf den diese Kraft wirkt;

α, β, γ die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den Axen der x, y und z einschließt;

ϖ, ϱ, σ die kürzesten Entfernungen dieser Richtung von denselben Axen.

Die Größen der Bewegung, welche sich an dem vollen Körper das Gleichgewicht halten müssen, geben nach Cap. XVI folgende Gleichungen für das Gleichgewicht der Verschiebung

$$S.m(U_1 + U) = \Phi \cos.\alpha; \quad S.m(V_1 + V) = \Phi \cos.\beta;$$
$$S.m(W_1 + W) = \Phi \cos.\gamma.$$

Weil aber die Coordinaten im Schwerpunkte ihren Anfangspunkt haben, ist

$$S.mx = 0, \quad S.my = 0, \quad S.mz = 0;$$

folglich auch

$$S.m\frac{dx}{dt} = 0, \quad S.m\frac{dy}{dt} = 0, \quad S.m\frac{dz}{dt} = 0.$$

Dadurch verschwinden die Größen $S.mU$, $S.mV$, $S.mW$ aus den obigen Gleichungen und diese reducieren sich, wenn man durch M die Gesammtmasse des Körpers bezeichnet, auf

$$MU_1 = \Phi \cos.\alpha, \quad MV_1 = \Phi \cos.\beta, \quad MW_1 = \Phi \cos.\gamma.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Geschwindigkeiten, welche der Stoß dem Schwerpunkte des Körpers ertheilt: dieser Schwerpunkt nimmt offenbar durch Einwirkung eines Stoßes dieselbe Bewegung an, welche er erhalten würde, wenn die Gesammtmasse des Körpers in ihm concentriert wäre und der Stoß unmittelbar auf ihn wirkte.

§. 318. Zweitens sind die Gleichungen des Gleichgewichts der Umdrehung

$$S.m[y(U_1 + U) - x(V_1 + V)] = \Phi.\sigma \sin.\gamma;$$
$$S.m[x(W_1 + W) - z(U_1 + U)] = \Phi.\varrho \sin.\beta;$$
$$S.m[z(V_1 + V) - y(W_1 + W)] = \Phi.\varpi \sin.\alpha.$$

Dadurch, daß die Ausdrücke, deren Werth $= 0$ ist, in diesen Gleichungen getilgt werden, erhält man

$$S.m(yU - xV) = \Phi.\sigma \sin.\gamma;$$
$$S.m(xW - zU) = \Phi.\varrho \sin.\beta;$$
$$S.m(zV - yW) = \Phi.\varpi \sin.\alpha.$$

Oben ist nachgewiesen, daß die Bewegung des vollen Körpers in Folge des Stoßes um seinen Schwerpunkt stets

in einer Umdrehung um eine durch den Schwerpunkt hindurchgehende gerade Linie besteht; diese Umdrehung läßt sich in drei Umdrehungen um drei rechtwinklichte Axen zerlegen. Wenn also P, Q, R die drei Winkelgeschwindigkeiten sind, welche dem vollen Körper durch den Stoß um die Axen x, y, z ertheilt werden; so ist nach der in §. 249 gegebenen Gleichung (m)

$$U = yR - zQ, \quad V = zP - xR, \quad W = xQ - yP.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die vorigen Gleichungen erhält man

$$S.m[(x^2 + y^2)R - yzQ - zxP] = \Phi.\sigma\sin.\gamma,$$

$$S.m[(x^2 + z^2)Q - xyP - yzR] = \Phi.\varrho\sin.\beta,$$

$$S.m[(y^2 + z^2)P - xzR - xyQ] = \Phi.\varpi\sin.\alpha.$$

Durch diese Gleichungen sind die Geschwindigkeiten P, Q, R bestimmt.

§. 319. Dieselben erhalten eine einfachere Form, wenn man die drei im Schwerpunkte des Körpers sich schneidenden Hauptaxen als die Coordinatenaxen der x, y, z annimmt, deren Lage ja völlig willkührlich ist, da alsdann $S.mxy = 0$, $S.mxz = 0$, $S.myz = 0$ ist. Bezeichnet man also, wie in §. 287 und ff. die den Hauptaxen zugehörigen Trägheitsmomente durch A, B, C; so erhält man

$$CR = \Phi\sigma\sin.\gamma, \quad \text{daher} \quad R = \frac{\Phi\sigma.\sin.\gamma}{C},$$

$$BQ = \Phi\varrho\sin.\beta, \qquad Q = \frac{\Phi\varrho.\sin.\beta}{B},$$

$$AP = \Phi\varpi\sin.\alpha, \qquad P = \frac{\Phi\varpi.\sin.\alpha}{A}.$$

Die drei Winkelgeschwindigkeiten P, Q, R sind die Componierenden der Winkelgeschwindigkeit v, deren Werth ist

$$v = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2};$$

mit dieser Geschwindigkeit v bewegt sich der Körper um eine

Linie, welche mit den Axen der x, y und z Winkel bildet, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{P}{v}, \frac{Q}{v}, \frac{R}{v}.$$

Demnach ist also die dem Körper durch einen Stoß ertheilte Bewegung völlig bestimmt.

§. 320. Wenn die Richtung des Stoßes durch den Schwerpunkt des Körpers hindurchgeht; so ist $\varpi=0$, $\varrho=0$, $\sigma=0$: die drei Winkelgeschwindigkeiten sind also $=0$. In diesem Falle dreht sich der Körper nicht um seinen Schwerpunkt und die Wirkung des Stoßes besteht allein darin, daß er dem Schwerpunkte die in §. 317 nachgewiesene Geschwindigkeit ertheilt.

§. 321. Liegt die Richtung des Stoßes in einer der Coordinatenebenen, z. B. in der Ebene der yz, so daß sie die beiden Hauptaxen des Körpers, die mit den Axen der y und z zusammenfallen, schneidet; so ist

$$R=0, \quad Q=0, \quad P=\frac{\Phi\varpi}{A}:$$

der Körper bewegt sich um die Axe der x, also um die dritte Hauptaxe, mit der dritten Winkelgeschwindigkeit $\frac{\Phi\varpi}{A}$. Wenn demnach ein Körper einen Stoß erhält, dessen Richtung in der Ebene liegt, in der zwei der im Schwerpunkte des Körpers sich schneidenden Hauptaxen enthalten sind; so fängt er an sich um die dritte dieser Hauptaxen zu drehen.

§. 322. Die Bewegung, welche der Körper nach dem Augenblicke, in welchem ihm der Stoß gegeben ist, annimmt, ist durch die in §. 312 gegebenen Differentialgleichungen bestimmt: sie tritt so ein, wie es in diesem und dem folgenden §. angegeben ist. Poinsot hat die Art dieser Bewegung durch eine bildliche Darstellung klarer gemacht.

Nach den ersten Gleichungen von §. 318 sind nämlich im Anfange der Bewegung die Momente der Kräftepaare, welche durch die den Theilen des Körpers zugehörenden Größen der Bewegung gebildet werden, — und die Axen dieser Momente fallen mit denen der x, y, z zusammen —, resp. gleich den Momenten der Größen der Bewegung, welche die den Stoß bewirkende Kraft dem Körper ertheilt hat in Beziehung auf dieselben Axen genommen. Wenn man ferner in einem beliebigen Augenblicke die Größen der Bewegung der Theile des Körpers zusammensetzt; so muß man nach §. 314 um jede Axe die Kräftepaare wieder bekommen, deren Momente durch die Constanten λ, μ, ν bezeichnet sind und die ein seiner Größe und Richtung nach constantes Gesammtpaar geben, dessen Moment oben durch Σ bezeichnet ist. Wir haben also hier zur Bestimmung der Constanten λ, μ, ν die Gleichungen

$$\lambda = \Phi . \varpi \sin.\alpha, \quad \mu = \Phi . \varrho \sin.\beta, \quad \nu = \Phi . \sigma \sin.\gamma;$$

also

$$\Sigma = \Phi \sqrt{\varpi^2 \sin.\alpha^2 + \varrho^2 \sin.\beta^2 + \sigma^2 \sin.\gamma^2};$$

folglich nach den in §. 319 gegebenen Resultaten

$$\lambda = AP, \quad \mu = BQ, \quad \nu = CR,$$

und demnach

$$\Sigma = \sqrt{A^2P^2 + B^2Q^2 + C^2R^2},$$

worin P, Q, R die drei anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten sind.

Folglich schließt die Axe des resultierenden Gesammtpaares Σ, deren Richtung unveränderlich bleiben muß, mit den Axen der x, y, z (diese fallen hier mit den durch den Schwerpunkt hindurchgehenden Hauptaxen des Körpers im ersten Augenblicke der Bewegung zusammen) Winkel ein, deren Cosinus resp. sind

$$\frac{AP}{\Sigma}, \quad \frac{BQ}{\Sigma}, \quad \frac{CR}{\Sigma},$$

während die augenblickliche Rotationsaxe, um welche der Körper sich zu drehen anfängt, mit denselben Axen Winkel bildet, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{P}{v}, \quad \frac{Q}{v}, \quad \frac{R}{v}.$$

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, wollen wir das von Poinsot mit dem Namen Centralellipsoid bezeichnete Ellipsoid betrachten, dessen rechtwinklichte Axen mit den im Schwerpunkte des vollen Körpers sich schneidenden Hauptaxen zusammenfallen und in welchem jeder Radius Vector seinem Zahlenwerth nach gleich ist der Einheit dividiert durch die Quadratwurzel aus dem in Beziehung auf diesen Radius genommenen Trägheitsmomente.

Da nach §. 287 die Gleichung dieses Ellipsoids ist

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2;$$

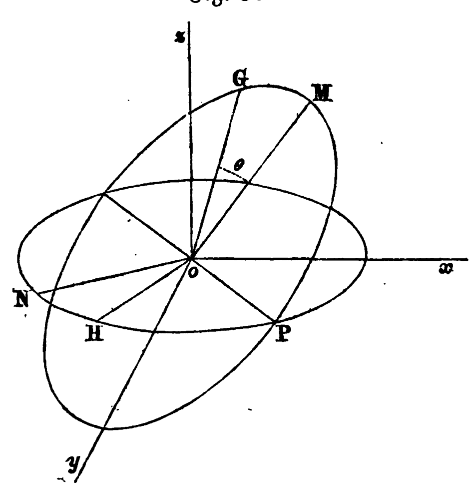
so bildet die nach dem Punkte der Oberfläche gezogene Normale, dessen Coordinaten x, y, z sind, mit den Axen Winkel, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}, \quad \frac{By}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}, \quad \frac{Cz}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}.$$

Wenn wir demnach x, y und z so wählen, daß sie die anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten P, Q und R darstellen, so daß der Radius Vector, der in dem Centralellipsoid nach dem durch diese Coordinaten festgelegten Punkte der Oberfläche gezogen ist, der Größe nach die anfängliche Winkelgeschwindigkeit v, der Richtung nach die Rotationsaxe, um welche sich der Körper im ersten Augenblicke dreht, darstellt; so stellt die in diesem Punkte auf der Oberfläche des Ellipsoids errichtete Normale die Axe des resultierenden Paares Σ dar, das aus den Bewegungsgrößen aller materiellen Theile des vollen Körpers hervorgeht.

Denken wir uns hiernach das Centralellipsoid bestimmt, so ist es leicht die anfängliche Bewegung des vollen Körpers in Folge eines ihm gegebenen Stoßes zu bestimmen. Denn nachdem wir (in Fig. 36) die Axe oG des Paares Σ,

Fig. 36.



dessen Moment gleich dem Momente des Stoßes ist, gezogen haben; suchen wir den Punkt M der Oberfläche des Centralellipsoids, in welchem die Normale der Linie oG parallel ist; der nach M vom Schwerpunkte des Körpers gezogene Radius Vector oM ist die augenblickliche Rotationsaxe im ersten Augenblicke. Wenn man ferner, wie oben, durch θ den Winkel GoM bezeichnet, der zwischen der Axe oG des Kräftepaares Σ und der anfänglichen Rotationsaxe oM liegt; so findet man die anfängliche Winkelgeschwindigkeit v um diese Axe aus der Gleichung

$$v \,.\, S \,.\, mr^2 = \Sigma \cos.\, \theta.$$

$S.mr^2$ ist das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die Axe oM.

Wir wollen hier annehmen, daß die Oberfläche des Centralellipsoids durch die Ebene der beiden Axen oG und oM in der Curve GMP geschnitten ist. Legt man dann durch den Mittelpunkt des Ellipsoids eine Ebene senkrecht gegen oG, die Axe des aus dem Stoße hervorgegangenen Kräftepaares, oder parallel zu der Berührungsebene der Oberfläche im Punkte M; so steht diese Ebene auf der erstern senkrecht und schneidet dieselbe in der Linie oP; sie schneidet die Oberfläche des Ellipsoids in der Curve PHN und der Durchmesser oP ist mit dem Durchmesser oM der Ellipse GMP conjugiert.

§. 325. Es bleibt noch übrig die Bewegung zu bestimmen, welche der Körper nach dem ersten Augenblicke annimmt. Nach §. 316 muß die Axe des aus den Einwirkungen der Centrifugalkräfte resultierenden Kräftepaares senkrecht auf der Ebene der beiden Axen oG und oM stehen und ist hier eine Linie oH, welche in der Ebene PHN senkrecht gegen oP liegt. Wenn man die augenblickliche Rotationsaxe, um welche diese Centrifugalkräfte zu drehen suchen, bestimmen will; so muß man nach dem vorigen §. den Punkt auf der Oberfläche des Centralellipsoids suchen, für welchen die Normale der Axe oH parallel ist; dieser Punkt ist kein anderer, als der Endpunkt N des mit dem Durchmesser oP in der Ellipse PHN conjugierten Durchmessers oN. Der dritte Durchmesser oN, welcher in dem Centralellipsoid mit der augenblicklichen Rotationsaxe oM und der Projection dieser augenblicklichen Axe auf der Ebene des aus dem Stoße hervorgegangenen Kräftepaares, oP, conjugiert ist, ist demnach die Axe, um welche die Centrifugalkräfte den vollen Körper zu drehen suchen. Um nun die Lage des Körpers im zweiten Augenblicke seiner Bewegung zu erkennen, muß man seine augenblickliche Rotationsgeschwindigkeit v um die Axe oM mit der unendlich

kleinen Rotationsgeschwindigkeit zusammensetzen, welche die Centrifugalkräfte dem Körper in dem Zeitelemente um die Axe oN ertheilen. Wenn wir die Geschwindigkeit v durch die Linie oM darstellen, dann auf oN von o aus eine unendlich kleine Linie abschneiden, welche die aus den Centrifugalkräften hervorgehende Geschwindigkeit darstellt, und das Parallelogramm vollenden; so stellt die Diagonale ihrer Größe nach die Winkelgeschwindigkeit des Körpers im zweiten Augenblicke dar, ihrer Lage nach die augenblickliche Rotationsaxe, um welche sich der Körper dreht.

Weil aber oN der durch den Punkt M der Oberfläche des Ellipsoids hindurchgehenden Berührungsebene parallel ist, muß der Endpunkt jener Diagonale in dieser Ebene liegen. Nun soll einerseits diese Berührungsebene fortwährend die Ebene des Kräftepaares darstellen, welches aus den allen Theilen des Körpers zugehörenden Größen der Bewegung resultiert, so daß jene stets eine feste Lage bewahren soll; andererseits soll die augenblickliche Rotationsaxe immer mit dem Radius Vector zusammenfallen, welcher nach dem Berührungspunkte des Centralellipsoids und derselben Ebene gezogen ist. Indem man nun auf die angegebene Weise immer von der in einem gegebenen Augenblicke statthabenden Bewegung zu der im folgenden Augenblicke eintretenden übergeht; kann man sich also die Bewegung eines freien Körpers um seinen Schwerpunkt so vorstellen, daß, indem man sich diesen Schwerpunkt ebensowohl, wie die an die Oberfläche des Centralellipsoids parallel zu der Ebene des aus dem Stoße hervorgegangenen Kräftepaares gelegte Berührungsebene im Raume fest denkt, das Ellipsoid ohne weiter zu gleiten auf der Berührungsebene rollt. Der Radius Vector, welcher nach dem Berührungspunkte des Ellipsoids und der Ebene gezogen wird, ist die augenblickliche

Rotationsaxe; die Winkelgeschwindigkeit ist der Länge dieses Radius proportional.

Wenn die Ebene des aus dem Stoße hervorgegangenen Kräftepaares senkrecht auf einer der im Schwerpunkt des Körpers sich schneidenden Hauptaxen steht, also auf einer der rechtwinklichten Axen des Centralellipsoids; so ist die Geschwindigkeit, welche die Centrifugalkräfte dem Körper ertheilen, $= 0$. Dann erleidet das Centralellipsoid keine Verschiebung und der Körper dreht sich fortwährend um jene Hauptaxe mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit. Vergl. §. 321.

XXII. Haupteigenschaften der Bewegung eines Systems von Körpern.

---

§. 324. Die in §. 255 und ff. gefundene Gleichung

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

drückt ganz allgemein die Gesetze der Bewegung eines beliebigen Systems materieller Punkte aus. Um jede besondre Aufgabe lösen zu können, muß man natürlich zu dieser Gleichung die Bedingungsgleichungen hinzunehmen, welche die Beschaffenheit des Systems bestimmen. Dabei haben jedoch alle Bewegungen von Systemen mehrere gemeinsame Eigenschaften, deren Kenntniß wichtig ist und die zugleich leicht aus jener Gleichung abgeleitet werden können.

Bewegung des Schwerpunkts.

§. 325. In jener Gleichung sind x, y, z die Coordinaten des Orts, in welchem sich der materielle Punkt, dessen Masse m ist, am Ende der Zeit t befindet und dieselben sind auf drei festen rechtwinklichten Axen gezählt. Wenn wir nun die Coordinaten des Schwerpunkts aller materiellen Punkte des Systems am Ende der Zeit t auf denselben Axen zählen und durch x_1, y_1, z_1 bezeichnen; wenn wir ferner die vom Schwerpunkte aus gezählten Coordinaten des Orts, in welchem sich am Ende der Zeit t der Punkt des Systems befindet, dessen Masse m ist, ξ, η, ζ nennen, so daß diese letzten Coordinaten auf rechtwinklichten, den erstern parallelen, beweglichen Axen gezählt werden; so muß man in der obigen Gleichung $x_1+\xi$, $y_1+\eta$, $z_1+\zeta$ statt x, y, z schreiben und erhält demnach

$$S.m\left[\frac{d^2x_1+d^2\xi}{dt^2}(\delta x_1+\delta\xi)+\frac{d^2y_1+d^2\eta}{dt^2}(\delta y_1+\delta\eta)+\frac{d^2z_1+d^2\zeta}{dt^2}(\delta z_1+\delta\zeta)\right]=$$
$$=S.[X(\delta x_1+\delta\xi)+Y(\delta y_1+\delta\eta)+Z(\delta z_1+\delta\zeta)].$$

Da jedoch wegen der Eigenschaft des Schwerpunkts stets

$$S.m\xi=0,\quad S.m\eta=0,\quad S.m\zeta=0;$$

so ist auch

$$S.m\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\quad S.m\frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\quad S.m\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0,$$

und

$$S.m\delta\xi=0,\quad S.m\delta\eta=0,\quad S.m\delta\zeta=0.$$

Hiernach nimmt die obige Gleichung folgende Form an

$$S.m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\delta x_1+\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1+\frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta+\frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right)=$$
$$=S[X(\delta x_1+\delta\xi)+Y(\delta y_1+\delta\eta)+Z(\delta z_1+\delta\zeta)].$$

Wenn nun das System völlig frei ist oder beliebig im Raume seinen Ort ändern kann; so enthalten die Gleichungen,

die die Beschaffenheit des Systems ausdrücken, nur die Bedingungen, nach denen sich die verschiedenen Punkte gegen einander bewegen und enthalten darum nur die Coordinaten ξ, η, ζ, welche die Lage der Punkte gegen einander bestimmen, enthalten aber nicht die Coordinaten x_1, y_1, z_1, welche die absolute Lage des Systems im Raume bestimmen. Es dürfen demnach die Variationen δx_1, δy_1, δz_1, als vollkommen willkührlich angesehen werden und man muß daher, wenn die obige Gleichung für alle Fälle gültig sein soll, die besondern Gleichungen haben

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}.S.m = S.X, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}.S.m = S.Y, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2}.S.m = S.Z;$$

durch diese ist die Bewegung des Schwerpunktes bestimmt.

Die Ausdrücke $S.X$, $S.Y$, $S.Z$ in diesen Gleichungen enthalten allein die äußern Kräfte; die gegenseitigen Einwirkungen, welche etwa Zusammenziehung oder Ausdehnung der Theile des Systems oder zwischen den materiellen Punkten wirkende Anziehung oder Abstoßung bewirken könnten, werden dabei durchaus nicht berücksichtigt. Denn die innern Kräfte, die auf den Schwerpunkt übertragen stets zu je zweien einander gleich und direct entgegengesetzt sind, haben nothwendig eine Resultierende, die $= 0$ ist. Folglich bewegt sich ein völlig freies System stets so, als wenn alle Massen im Schwerpunkte vereinigt wären und auf diesen unmittelbar alle äußeren Kräfte je nach ihrer Richtung wirkten.

Setzt man ferner die Ausdrücke, welche die Variationen δx_1, δy_1, δz_1 enthalten, einzeln $= 0$, so bleibt die Gleichung

$$S.m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right) = S.(X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta),$$

welche die Bewegungen der Punkte des Systems in Beziehung auf den Schwerpunkt bestimmt.

§. 326. Wenn das völlig freie System der Einwirkung einer äußern Kraft nicht unterliegt, seine Bewegung also nur Folge der den materiellen Punkten ertheilten anfänglichen Geschwindigkeit ist; so reduciert sich die obige Gleichung, da ihre rechte Seite $= 0$ ist, auf

$$S.m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\delta x_1+\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1+\frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta+\frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right)=0,$$

und man hat, wie oben, die drei Gleichungen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}.S.m=0,\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}.S.m=0,\quad \frac{d^2z_1}{dt^2}.S.m=0.$$

Wenn man in Beziehung auf die Zeit integriert, erhält man daraus

$$\frac{dx_1}{dt}.S.m=A,\quad \frac{dy_1}{dt}.S.m=B,\quad \frac{dz_1}{dt}.S.m=C.$$

A, B, C bezeichnen Constanten. Welche Bewegung in diesem Falle die Theile des Systems gegen einander haben mögen, der Schwerpunkt beschreibt mit gleichförmiger Bewegung eine gerade Linie.

§. 327. Um zu prüfen, welches die absoluten Bewegungsgrößen der materiellen Punkte des Systems am Ende der Zeit t sind; bezeichnen wir für jeden materiellen Punkt, dessen Masse m ist, die Componierenden derselben nach Richtung jeder Axe durch

$$m\frac{dx}{dt},\quad m\frac{dy}{dt},\quad m\frac{dz}{dt};$$

diese lassen sich auch so schreiben

$$m\frac{dx_1+d\xi}{dt},\quad m\frac{dy_1+d\eta}{dt},\quad m\frac{dz_1+d\zeta}{dt};$$

demnach sind die Summen dieser Componierenden, resp. nach Richtung der x, y, z genommen

$$S.m\frac{dx_1+d\xi}{dt},\quad S.m\frac{dy_1+d\eta}{dt},\quad S.m\frac{dz_1+d\zeta}{dt}.$$

Da aber nach §. 325 stets

$$S.m\frac{d\xi}{dt}=0,\quad S.m\frac{d\eta}{dt}=0,\quad S.m\frac{d\zeta}{dt}=0;$$

so reducieren sich die obigen Summenformeln auf die Größen

$$\frac{dx_1}{dt}.S.m,\quad \frac{dy_1}{dt}.S.m,\quad \frac{dz_1}{dt}.S.m,$$

die nach dem vorigen §. während der ganzen Dauer der Bewegung die mit A, B, C bezeichneten constanten Werthe behalten.

Wenn man folglich in einem beliebigen Augenblicke die allen materiellen Punkten des Systems zugehörenden Größen der Bewegung nach der in §. 54 und ff. entwickelten Methode zusammensetzt; so erhält man stets, sobald als diese Größen der Bewegung an den Anfangspunkt der Coordinaten übertragen und nach Richtung der drei Axen zerlegt sind, partielle Resultierende, deren unveränderliche Werthe die Constanten A, B, C, darstellen: deshalb ist auch die auf den Anfangspunkt der Coordinaten wirkende Gesammtresultierende nach Größe und Richtung unveränderlich.

Aus dem vorangehenden folgt daher, 1°, daß der Schwerpunkt des Systems sich beständig geradlinig mit gleichförmiger Bewegung bewegt; 2°, daß in jedem beliebigen Augenblicke die Richtung der Resultierenden aus den Bewegungsgrößen aller materiellen Punkte stets mit der geraden Linie, welche der Schwerpunkt beschreibt, zusammenfällt und daß ihr Werth gleich ist der Summe der Massen des Systems multipliciert mit der Geschwindigkeit des Schwerpunkts.

Hierin liegt das Grundgesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts. Dies Grundgesetz ist für jedes freie, der Einwirkung äußerer Kräfte nicht unterliegende System gültig. Die obigen Sätze sind

außerdem von den etwa zwischen den materiellen Punkten bestehenden innern Einwirkungen völlig unabhängig: sie gelten eben so wohl, wenn diese Punkte durch unausdehnbare Stäbe oder Fäden oder durch elastische Bänder verbunden sind, als wenn allein Anziehungs- oder Abstoßungskräfte zwischen ihnen wirken oder sie ganz und gar keine Einwirkung auf einander haben. Endlich macht selbst der Fall keinen Unterschied, daß Theile des Systems auf einander stoßen und diese Stöße augenblicklich die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte um endliche Größen verändern; denn diese Aenderungen werden durch innere, zwischen den Theilen des Systems bestehende Einwirkungen hervorgebracht.

§. 328. Soll die Wirkung mehrerer augenblicklich verschiedenen Punkten des Systems gegebener Stöße untersucht werden, während wir vorhin die dauernde Einwirkung mehrerer beschleunigender Kräfte in Betracht zogen; so muß man nach §. 258 darauf zurückkommen, daß die diesen Punkten ertheilten Größen der Bewegung der Bedingung unterworfen sind, daß die verlorenen Größen der Bewegung im System sich das Gleichgewicht halten müssen. Bezeichnet man mit Φ die dem Punkte des Systems ertheilte Bewegungsgröße, dessen Masse m ist; mit α, β, γ die Winkel, welche die Axen der x, y, z mit der Richtung der diese Bewegungsgröße hervorbringenden Kraft bilden: so sind die durch diesen Punkt bezüglich nach Richtung jeder Axe verlorenen Größen der Bewegung

$$\Phi \cos.\alpha - m\frac{dx}{dt}, \quad \Phi \cos.\beta - m\frac{dy}{dt}, \quad \Phi \cos.\gamma - m\frac{dz}{dt};$$

folglich wird die Bedingung des Gleichgewichts der verlorenen Größen der Bewegung für alle Theile des Systems ausgedrückt durch die Gleichung

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)=S.\Phi(\delta x\cos.\alpha+\delta y\cos.\beta+\delta z\cos.\gamma).$$

Da nach §. 325 leicht nachgewiesen werden kann, daß man einzeln die drei Gleichungen haben muß

$$\frac{dx_1}{dt}.S.m=S.\Phi\cos.\alpha,\quad \frac{dy_1}{dt}.S.m=S.\Phi\cos.\beta,$$

$$\frac{dz_1}{dt}.S.m=S.\Phi\cos.\gamma;$$

so nimmt demnach der Schwerpunkt die Geschwindigkeit an, die er erhalten würde, wenn die ganze Masse des Systems in diesem Punkte concentriert wäre und alle Stöße unmittelbar auf ihn wirkten.

Nach Aufstellung der drei vorhergehenden Gleichungen bleibt demnach die Gleichung

$$S.m\left(\frac{d\xi}{dt}\delta\xi+\frac{d\eta}{dt}\delta\eta+\frac{d\zeta}{dt}\delta\zeta\right)=S.\Phi(\delta\xi\cos.\alpha+\delta\eta\cos.\beta+\delta\zeta\cos.\gamma),$$

welcher die Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, die den Theilen des Systems gegen einander in Beziehung auf den Schwerpunkt ertheilt sind, Genüge leisten müssen.

Rotationsbewegung. Princip der Flächen.

§. 329. In der in §. 324 angeführten Hauptgleichung

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

welche wir hier wieder aufnehmen, sind x, y, z die rechtwinklichten Coordinaten des Punktes im Systeme, dessen Masse m ist, von einem festen Anfangspunkte aus am Ende der Zeit t gezählt. Den Variationen δx, δy, δz kann man alle Werthe beilegen, welche zu den Bedingungen der Verbindung der Theile des Systems passen. Bei der Annahme, daß das System sich frei im Raume bewegt, darf man, wie es auch beschaffen sein mag, ohne gegen jene

Bedingungen zu verstoßen, sich denken, daß es sich ohne Veränderung seiner Gestalt um einen festen Punkt dreht. Setzen wir demnach die durch eine solche Bewegung bestimmten Werthe δx, δy, δz, wobei der feste Umdrehungspunkt als Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird, in die voranstehende Gleichung; so ist, wie wir aus §. 249 wissen, wenn durch $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\chi$ die unendlich kleinen Winkel bezeichnet werden, die das System bezüglich um die Axen der x, y, z beschreibt

$$\delta x = y\delta\chi - z\delta\omega,\quad \delta y = z\delta\varphi - x\delta\chi,\quad \delta z = x\delta\omega - y\delta\varphi;$$

substituiert man diese Werthe in die obige Gleichung; so erhält man, wenn man einzeln die mit den Variationen $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\chi$ behafteten Ausdrücke $= 0$ setzt, da deren Werthe allen Punkten des Systems gemeinsam und völlig willkührlich sind, die Gleichungen

$$S.m\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2} = S.(Xy - Yx),$$

$$S.m\frac{xd^2z - zd^2x}{dt^2} = S.(Zx - Xz),$$

$$S.m\frac{zd^2y - yd^2x}{dt^2} = S.(Yz - Zy).$$

Da $yd^2x - xd^2y$, $xd^2z - zd^2x$, $zd^2y - yd^2z$ bezüglich die Differentiale der Größen $ydx - xdy$, $xdz - zdx$, $zdy - ydz$ sind; so kann man diese Gleichungen auch so schreiben

$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}y - \frac{dy}{dt}x\right) = S.(Xy - Yx),$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}x - \frac{dx}{dt}z\right) = S.(Zx - Xz),$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}z - \frac{dz}{dt}y\right) = S.(Yz - Zy).$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichungen stellen die Momente der auf die Punkte des Systems

wirkenden Kräfte dar, resp. in Beziehung auf die Axen der z, der y und der x genommen; auf der linken Seite stehen die Differentialquotienten der in Beziehung auf die Zeit differentiierten Momente der Größen der Bewegung $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$, die in Beziehung auf dieselben Axen genommen den Punkten des Systems am Ende der Zeit t für ihre Bewegung nach Richtung der Coordinaten x, y, z zukommen. Es muß außerdem (vergl. §. 325) bemerkt werden, daß die aus den innern Einwirkungen hervorgehenden Kräfte, welche zwischen den verschiedenen Punkten des Systems wirken, nicht in die rechte Seite der obigen Gleichungen hineintreten, weil sie nur gegenseitig sich aufhebende Ausdrücke geben.

§. 330. Der Fall, daß die rechte Seite der vorangehenden Gleichungen $= 0$ ist, tritt ein: 1^0, wenn keine äußere Kraft auf das System wirkt; 2^0, wenn die äußern auf die verschiedenen Punkte des Systems wirkenden Kräfte beständig gegen den Anfangspunkt der Coordinaten wirken. Dann ist

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}y - \frac{dy}{dt}x\right) = N,$$

$$S.m\left(\frac{dz}{dt}x - \frac{dx}{dt}z\right) = M,$$

$$S.m\left(\frac{dy}{dt}z - \frac{dz}{dt}y\right) = L;$$

N, M, L sind Constanten. Folglich, wenn man in einem beliebigen Zeitpunkte die den materiellen Punkten zugehörenden Bewegungsgrößen nach den in §. 54 gegebenen Regeln zusammensetzt; so findet man stets die nämlichen Werthe N, M, L für die Momente der drei componierenden Kräftepaare, die in den Coordinatenebenen wirken; auch das Moment des resultierenden Paares, das durch

$$\sqrt{N^2 + M^2 + L^2}$$

dargestellt wird, hat stets einen constanten Werth und die Ebene dieses Paares bildet mit den festen Ebenen der xy, xz, yz unveränderliche Winkel, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{N}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}}, \quad \frac{M}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}}, \quad \frac{L}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}}.$$

Diese Eigenschaften sind den in §. 314 entwickelten analog. In jedem freien Systeme, auf welches keine äußere Kraft wirkt, ist das aus den Bewegungsgrößen der Theile des Systems resultierende Kräftepaar in Beziehung auf einen beliebigen festen Anfangspunkt genommen seiner Größe und Richtung nach constant.

Wenn im Systeme ein fester Punkt ist, gilt gleichfalls dieser Satz, aber nur, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den festen Punkt gelegt denken; natürlich darf das System nicht der Einwirkung einer äußern Kraft unterliegen oder es müssen die auf dasselbe wirkenden Kräfte alle gegen den festen Punkt wirken.

§. 331. Wenn wir stets voraussetzen, daß das System sich im Raume frei bewegt; so reduciert sich nach §. 325 unsere Hauptgleichung auf

$$S.m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right) = S.(X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta).$$

Man kann diese Gleichung ebenso umformen, wie die in §. 329 gegebene. ξ, η, ζ sind die Coordinaten des Punkts im Systeme, dessen Masse m ist, welche am Ende der Zeit t vom Schwerpunkt aus auf drei rechtwinklichten, den festen Axen x, y, z parallelen Axen gezählt sind. Wie auch das gegebene System beschaffen sein mag, man kann stets, ohne gegen die Bedingungen der Verbindung seiner Theile zu verstoßen, für $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, solche Werthe annehmen, wie sie aus einer solchen Bewegung hervorgehen,

daß das System ohne seine jetzige Gestalt zu verändern sich wie ein voller Körper um seinen Schwerpunkt dreht. So leitet man aus der vorigen Gleichung die drei folgenden ab

$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}.\eta-\frac{d\eta}{dt}\xi\right)=S.(X\eta-Y\xi),$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\zeta}{dt}.\xi-\frac{d\xi}{dt}\zeta\right)=S.(Z\xi-X\zeta),$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dt}.\zeta-\frac{d\zeta}{dt}\eta\right)=S.(Y\zeta-Z\eta).$$

Die rechte Seite dieser drei Gleichungen ist $=0$: 1°, wenn keine äußere Kraft auf das System wirkt; 2°, wenn die Richtung der auf den Punkt m wirkenden Kraft durch den Schwerpunkt hindurchgeht. In beiden Fällen erhält man durch Integrierung die drei Gleichungen

$$S.m\left(\frac{d\xi}{dt}\eta-\frac{d\eta}{dt}\xi\right)=\nu,$$

$$S.m\left(\frac{d\zeta}{dt}\xi-\frac{d\xi}{dt}\zeta\right)=\mu,$$

$$S.m\left(\frac{d\eta}{dt}\zeta-\frac{d\zeta}{dt}\eta\right)=\lambda,$$

wo ν, μ, λ Constanten bezeichnen. Folglich haben in jedem beliebigen Augenblicke die Momente der drei componierenden Kräftepaare, die aus den Größen der Bewegung $m\frac{d\xi}{dt}$, $m\frac{d\eta}{dt}$, $m\frac{d\zeta}{dt}$ der Punkte des Systems in Beziehung auf den Schwerpunkt hervorgehen, der als Anfangspunkt der Coordinaten genommen ist, die nämlichen Werthe ν, μ, λ. Auch das aus diesen Größen der Bewegung resultierende Kräftepaar hat stets das nämliche Moment, das ausgedrückt wird durch

$$\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2},$$

und die Ebene dieses Kräftepaares bildet beständig mit den Ebenen der $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ oder auch mit den festen Ebenen

der xy, xz, yz Winkel, deren Cosinus resp. sind

$$\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2}}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2}}, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2}}.$$

Diese Resultate vervollständigen die in §. 327 entwickelten. In einem freien Systeme also, welches keiner Einwirkung einer äußern Kraft unterliegt oder in welchem die äußern Kräfte gegen den Schwerpunkt hin wirken, ist das aus den Bewegungsgrößen der Theile des Systems in Beziehung auf den Schwerpunkt resultierende Kräftepaar so beschaffen, daß sein Moment constant, seine Ebene ihrer anfänglichen Lage parallel ist.

§. 332. Man nennt diese Eigenschaft wohl **Erhaltung der Rotationsbewegung**. Diese Sätze kann man jedoch auch von einem andern Gesichtspunkt aus betrachten. Nehmen wir die Gleichungen von §. 330 wieder auf

$$S.m(ydx - xdy) = N.dt,$$
$$S.m(xdz - zdx) = M.dt,$$
$$S.m(zdy - ydz) = L.dt,$$

so stellen die Größen $ydx - xdy$, $xdz - zdx$, $zdy - ydz$ bezüglich das doppelte der unendlich kleinen Flächenstücke dar, welche die Projectionen des Radius Vector, der vom Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Punkte des Systems, dessen Masse m ist, hingezogen ist, auf den drei Ebenen der xy, xz, yz in der Zeit dt beschreiben. Demnach sagen jene drei Gleichungen aus, daß die Summen dieser Flächenstücke mit den Massen m multipliciert stets der Zeit proportional wachsen. Wenn man also in einem beliebigen Zeitpunkte der Bewegung des Systems die Summe der Producte aus den Massen jedes der materiellen Punkte in die Flächenstücke nimmt, welche in einer gegebenen Zeit auf einer beliebigen Ebene durch die Projectionen ihrer

Radii Vectores beschrieben sind; so hat diese Summe stets einen constanten Werth.

Dies Resultat kann einfacher ausgedrückt werden, wenn man annimmt, daß die Massen des Systems aus unter sich gleichen Theilen in beliebiger Anzahl zusammengesetzt sind, und vom festen Anfangspunkte der Coordinaten aus nach jedem dieser Theile einen Radius Vector gezogen denkt. Alsdann kann man sagen, daß die Summe der in einer gegebenen Zeit durch die Projectionen der Radii Vectores auf einer beliebigen Ebene beschriebenen Flächenstücke immer einen constanten Werth behalten muß.

Augenscheinlich sind auch die in einer beliebigen Zeit t auf den drei Coordinatenebenen beschriebenen Flächenstücke, die durch Nt, Mt, Lt ausgedrückt werden, den Momenten der drei componierenden Kräftepaare, die aus den Bewegungsgrößen der materiellen Punkte gebildet sind, proportional (über diese Paare vergl. §. 330). Ferner besteht zwischen einem von einem Radius Vector in einer beliebigen Ebene beschriebenen Flächenstücke und der Projection desselben auf einer andern Ebene dasselbe Verhältniß, wie zwischen dem Momente eines in der ersten Ebene wirkenden Kräftepaares und dem Momente desselben Paares, wenn es nach Richtung der zweiten Ebene zerlegt ist. Es folgt demnach: 1⁰, daß die Summe der Flächenstücke, die in der Zeit t auf der Ebene des resultierenden Paares beschrieben sind, auf der Ebene also, welche mit der Ebene der xy, der xz und der yz Winkel bildet, deren Cosinus bezüglich sind

$$\frac{N}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},\quad \frac{M}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},\quad \frac{L}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},$$

ausgedrückt wird durch

$$t\sqrt{N^2+M^2+L^2};$$

2) daß die Summe der in der Zeit t auf jeder andern

Ebene beschriebenen Flächenstücke, die mit jener den Winkel θ einschließt, ausgedrückt wird durch

$$t\sqrt{N^2+M^2+L^2}\,.\cos.\theta,$$

natürlich also kleiner, als die vorige ist.

Demnach ist die Bewegung eines freien, durch äußere Kräfte nicht angegriffnen Systemes stets der Art, daß die Summe der Flächenstücke, welche in beliebiger Zeit auf einer beliebigen Ebene durch die Projectionen der von einem festen, willkührlich gewählten Mittelpunkte ausgehenden Radii Vectores beschrieben sind, constant ist. Für jeden festen Mittelpunkt giebt es eine Ebene, für welche der Werth dieser Summe größer ist, als für jede andere durch denselben Punkt hindurchgelegte Ebene. Diese Ebene des Maximums der Flächen behält eine bestimmte, mit der Zeit sich nicht ändernde Richtung.

Diese Sätze behalten auch dann ihre Gültigkeit, wenn das System der Einwirkung solcher äußerer Kräfte unterliegt, die stets gegen den festen Punkt wirken, von welchem die Radii Vectores ausgehen.

§. 333. Aus den in §. 331 gegebenen Sätzen lassen sich analoge Sätze folgern. Wenn man sich eine durch den Schwerpunkt des Systems hindurchgehende Ebene denkt, die sich ihrer anfänglichen Lage parallel ebenso, wie der Schwerpunkt bewegt; so folgt augenscheinlich, falls das System frei ist und entweder keine äußern Kräfte oder nur solche darauf wirken, deren Resultierende beständig durch den Schwerpunkt geht, daß 1° die Summe der Flächenstücke, welche in einer gegebenen Zeit auf dieser Ebene durch die Projectionen der vom Schwerpunkte ausgehenden Radii Vectores beschrieben sind, constant ist; 2°, daß die Ebene, auf der die Summe der Flächenstücke die größte ist, der

Bewegung des Schwerpunkts folgt und stets in einer der anfänglichen parallelen Lage fortrückt.

Diese wichtigen Eigenschaften hat man mit dem Namen Princip der Flächen bezeichnet. Die Ebene, welche das Maximum der Flächenstücke enthält, wird nach dem Vorgange von Laplace unveränderliche Ebene genannt. Es erleichtert die analytischen Untersuchungen besonders der Gesetze des Weltsystems, wenn man die Ebene berücksichtigt.

§. 334. Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Wirkung eines augenblicklichen Stoßes, wie in §. 328. In die in diesem §. aufgestellte Gleichung

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)=S.\Phi(\delta x\cos.\alpha+\delta y\cos.\beta+\delta z\cos.\gamma)$$

substituiere man die in §. 329 gegebenen Werthe für δx, δy, δz und erhält dadurch die drei Gleichungen

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}y-\frac{dy}{dt}x\right)=S.\Phi(y\cos.\alpha-x\cos.\beta),$$

$$S.m\left(\frac{dz}{dt}x-\frac{dx}{dt}z\right)=S.\Phi(x\cos.\gamma-z\cos.\alpha),$$

$$S.m\left(\frac{dy}{dt}z-\frac{dz}{dt}y\right)=S.\Phi(z\cos.\beta-y\cos.\gamma),$$

welche zwischen den ertheilten Größen der Bewegung und den durch jenen Stoß hervorgebrachten Anfangsgeschwindigkeiten bestehen müssen. Wenn man diese Gleichungen mit den in §. 330 gegebenen vergleicht; so sieht man, daß, wenn das System frei ist, die linke Seite der Gleichungen die durch N, M, L bezeichneten unveränderlichen Werthe behält; demnach stellen diese Constanten die in Beziehung auf die Axen der z, y und x genommenen Momente der anfänglichen Stöße dar, welche die Bewegung des Systems bewirkt haben.

§. 335. Wenn man ebenso die am Ende von §. 328 gegebene Gleichung umformt:

$$S.m\left(\frac{d\xi}{dt}\delta\xi+\frac{d\eta}{dt}\delta\eta+\frac{d\zeta}{dt}\delta\zeta\right)=S.\Phi(\delta\xi\cos.\alpha+\delta\eta\cos.\beta+\delta\zeta\cos.\gamma);$$

so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$S.m\left(\frac{d\xi}{dt}\eta-\frac{d\eta}{dt}\xi\right)=S.\Phi(\eta\cos.\alpha-\xi\cos.\beta),$$

$$S.m\left(\frac{d\zeta}{dt}\xi-\frac{d\xi}{dt}\zeta\right)=S.\Phi(\xi\cos.\gamma-\zeta\cos.\alpha),$$

$$S.m\left(\frac{d\eta}{dt}\zeta-\frac{d\zeta}{dt}\eta\right)=S.\Phi(\zeta\cos.\beta-\eta\cos.\gamma).$$

Diese bestimmen die Anfangsgeschwindigkeiten der Theile des Systems in Beziehung auf ihren Schwerpunkt. In §. 331 ist nachgewiesen, daß die linke Seite dieser Gleichungen, wenn das System frei ist, während der ganzen Dauer der Bewegung die mit ν, μ, λ bezeichneten constanten Werthe behält. Diese Größen sind also die in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt des Systems hindurchgehenden Axen genommenen Momente der Stöße, welche im Anfange die Bewegung des Systems bewirkt haben.

Princip der lebendigen Kräfte.

§. 336. Wenn der analytische Ausdruck für die Bedingungen der Verbindungen der materiellen Punkte nicht die Zeit enthält; so darf man in der Gleichung des §. 324

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

die Variationen δx, δy, δz durch die Differentiale dx, dy, dz ersetzen, d. h. man darf statt der Verschiebung, welche die Werthe jener Variationen bestimmt, gleich die Bewegung nehmen, welche das System in dem Zeitelement erhält, das dem Augenblicke folgt, in welchem man es betrachtet. Dann geht die vorige Gleichung über in

$$S.m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=S.(Xdx+Ydy+Zdz),$$

oder, wenn man in Beziehung auf die Zeit integriert

$$S.m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2S.\int(Xdx+Ydy+Zdz)+\text{Const.}$$

Wenn man also die Geschwindigkeit des materiellen Punkts, dessen Masse m ist, am Ende der Zeit t durch v bezeichnet, erhält man

$$S.mv^2=2S.\int(Xdx+Ydy+Zdz)+\text{Const.}$$

Wenn man die in §. 144 angewandte Bezeichnung einführt, so läßt sich dies Resultat folgendermaßen ausdrücken: in einer gegebenen Zeit ist der Zuwachs der Summe der lebendigen Kräfte der Punkte des Systems stets numerisch gleich dem Doppelten der Summe der Größen der Einwirkung, welche in derselben Zeit alle auf diese Punkte wirkenden Kräfte hervorgebracht haben.

§. 337. Wenn die Größe $S(Xdx+Ydy+Zdz)$ das genaue Differential einer Function Π der drei Veränderlichen x, y, z ist, so daß $S(Xdx+Xdy+Zdz)=d\Pi$; so erhält man aus der obigen Gleichung

$$S.mv^2-S.mv_0{}^2=2(\Pi-\Pi_0),$$

wo v_0 und Π_0 die Werthe von v und Π sind, die der ursprünglichen Lage des Systems zugehören. Der Werth der lebendigen Kraft hängt allein von der Function Π, dem ursprünglichen Zustande des Systems und der Lage seiner Theile am Ende der Zeit t ab.

Die Function $S(Xdx+Ydy+Zdz)$ ist ein genaues Differential von x, y, z, wenn die auf die materiellen Punkte wirkenden Kräfte gegen feste Mittelpunkte wirken und Functionen der Entfernungen der materiellen Punkte von diesen Mittelpunkten sind; sie ist es gleichfalls, wenn diese Kräfte aus den innern Einwirkungen hervorgehen,

welche zwischen den verschiedenen Punkten des Systems wirken und wenn sie Funktionen der Entfernungen dieser Punkte von einander sind. Sind nämlich im ersten Falle a, b, c die Coordinaten eines festen Mittelpunkts, von welchem die auf den Punkt m wirkende Kraft ausgeht, dessen Coordinaten am Ende der Zeit t, x, y, z sind; so ist die Entfernung des Punktes m von dem festen Mittelpunkte, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, und falls die Kraft R den Punkt m von diesem Mittelpunkte zu entfernen strebt, ist der Ausdruck für die drei Componierenden dieser Kraft X, Y, Z,

$$X = R\frac{x-a}{r}, \quad Y = R\frac{y-b}{r}, \quad Z = R\frac{z-c}{r}.$$

Man erhält demnach in der obigen Summenformel für die Kraft R folgenden Ausdruck

$$R\left(\frac{x-a}{r}dx + \frac{y-b}{r}dy + \frac{z-c}{r}dz\right);$$

da nun

$$\frac{x-a}{r} = \frac{dr}{dx}, \quad \frac{y-b}{r} = \frac{dr}{dy}, \quad \frac{z-c}{r} = \frac{dr}{dz};$$

so ist dieser Ausdruck ein genaues Differential, weil R eine Function von r sein soll. Wenn wir im zweiten Falle die zwischen den beiden Punkten m und m' wirkende Kraft gleichfalls durch R, am Ende der Zeit t die Coordinaten von m durch x, y, z, von m' durch x', y', z' bezeichnen; so ist der Ausdruck für die Entfernung r dieser beiden Punkte $= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Falls nun die Kraft R die beiden Punkte von einander zu entfernen strebt, so sind die drei Componierenden des durch sie auf den Punkt m geübten Drucks

$$X = R\frac{x-x'}{r}, \quad Y = R\frac{y-y'}{r}, \quad Z = R\frac{z-z'}{r},$$

und die drei Componierenden des durch sie auf den Punkt m' geübten Drucks

$$X' = -R\frac{x-x'}{r}, \quad Y' = -R\frac{y-y'}{r}, \quad Z' = -R\frac{z-z'}{r}.$$

Für diese Kraft erhält man demnach die Formel

$$\frac{R}{r}\Big[(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')+(z-z')(dz-dz')\Big],$$

die sich gleichfalls auf Rdr reducieren läßt, weil

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

und folglich ein genaues Differential ist, wenn R als Function von r gegeben ist.

§. 338. Wenn auf die Punkte des Systems keine Kraft wirkt, so reduciert sich die obige Gleichung auf

$$S.mv^2 = \text{Const.}$$

Die Summe der lebendigen Kräfte der materiellen Punkte verändert sich nicht mit der Zeit und behält beständig ihren anfänglichen Werth.

Diese Eigenschaften hat man Erhaltung der lebendigen Kräfte genannt. Es ist von Wichtigkeit genau zu wissen, in welchem Falle sie statt haben und wann nicht.

1) Wenn das System so gebildet ist, wie wir in §. 230 nachgewiesen haben, d. h. wenn es aus materiellen Punkten besteht, die durch völlig unbiegsame und unausdehnsame, masselos gedachte Stäbe oder Fäden verbunden sind; so sind die obigen Sätze immer gültig, selbst dann, wenn einige der materiellen Punkte völlig fest werden oder gezwungen sind, sich auf gegebenen festen Linien oder Flächen zu bewegen. Ferner enthalten die Größen X, Y, Z alsdann nur die von außen auf das System wirkenden Kräfte; denn die innern Einwirkungen, die aus Spannung oder Zusammenziehung der Verbindungen des Systems oder aus dem gegen äußere feste Hindernisse geübten Druck

hervorgehe, können nicht darin enthalten sein, weil, wie aus §. 239 und 240 hervorgeht, die Summe der virtuellen Momente dieser Kräfte stets $= 0$ ist.

2) Wenn das System aus materiellen Punkten gebildet ist, welche durch stets masselos gedachte unausdehnsame und elastische Stäbe oder Fäden verbunden sind; so lassen sich die obigen Sätze zur Geltung bringen; jedoch muß man alsdann nicht allein die von außen auf das System wirkenden Kräfte, sondern auch die gegenseitigen innern Einwirkungen der durch elastische Bänder vereinigten materiellen Punkte in die Größen X, Y, Z einführen. Denn da hier wegen der Beschaffenheit dieser Verbindungen die Entfernung der beiden materiellen Punkte, zwischen denen jedesmal diese innern Einwirkungen statt haben, sich in Folge der Gestaltveränderungen des Systems verändert; so darf hier nicht das, was in §. 239 bemerkt ist, angewandt werden, noch darf im allgemeinen angenommen werden, daß die virtuellen Momente der innern Einwirkungen sich gegenseitig aufheben. In dem einzigen Falle dieser Art, wenn die innern Einwirkungen allein von der jedesmaligen Entfernung abhängen, bilden die Ausdrücke für diese Einwirkungen, wenn sie in die Formel $Xdx + Ydy + Zdz$ eingeführt werden, wie oben nachgewiesen ist, ein genaues Differential der Veränderlichen x, y, z.

3) Auch in solchen Systemen, wie unser Planetensystem eins ist, gilt der vorliegende Satz, wo die Körper sich unabhängig von einander bewegen und auf einander wirken, ohne daß ein materielles Band zwischen ihnen zu existieren scheint. Die gegenseitigen Einwirkungen der Körper auf einander müssen in die Größen X, Y, Z eingeführt werden und die Ausdrücke für diese Einwirkungen geben ein genaues Differential von x, y, z, wenn sie allein als Functionen der Entfernungen der materiellen Punkte gegeben sind.

4) Wenn Theile des Systems gegen einander stoßen, so verändert schon allein die Einwirkung dieses Stoßes den bestehenden Summenwerth der lebendigen Kräfte: es lassen sich also dann gewöhnlich die vorangehenden Sätze nicht mehr anwenden. Denn ein Stoß bringt neue innere Kräfte zwischen den Körpern zur Wirksamkeit, welche man als durch elastische, gegen Druck nachgiebige Bänder verbunden ansehen muß. Man muß deshalb in die rechte Seite der in §. 336 gegebenen Gleichung die Größe der Einwirkung hineinsetzen, welche diese Kräfte während der Dauer des Stoßes hervorrufen, wenn diese Gleichung noch immer genau den Werth der lebendigen Kraft des Systems angeben soll.

Man sieht hieraus, daß das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte nicht so allgemein gilt, als das vorher entwickelte Grundgesetz von der Erhaltung der Größen der Bewegung; dies letztere gilt ganz unabhängig von den innern Gegenwirkungen der Theile des Systems, während dies bei dem erstern nicht immer der Fall ist.

§. 339. Den zuletzt erwähnten Fall, daß Theile eines Systems von Körpern, die in Bewegung sind, gegen einander stoßen, müssen wir näher betrachten. Es ist schon oben bemerkt, daß in die rechte Seite der Gleichung

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(Xdx+Ydy+Zdz)$$

während der Dauer des Stoßes die virtuellen Momente der innern durch diesen Stoß hervorgerufenen Kräfte hineingesetzt werden müssen. Wenn wir nun durch N den Werth des am Ende der Zeit t zwischen zwei Körpern des Systems geübten Drucks, der durch Zusammenstoß hervorgebracht ist, bezeichnen; wenn wir ferner die Entfernung des Berührungspunktes von einem festen Punkte, der in

der Richtung der den Oberflächen beider Körper gemeinsamen, durch den Berührungspunkt hindurchgehenden Normale angenommen ist, n nennen; so ist $N\delta n$ das virtuelle Moment des Drucks N. Wenn wir dann zur Abkürzung die Geschwindigkeiten des materiellen Punktes, dessen Masse m ist, am Ende der Zeit t resp. nach Richtung der x, y, z durch u, v, w bezeichnen, so ist

$$S.m\left(\frac{du}{dt}\delta x+\frac{dv}{dt}\delta y+\frac{dw}{dt}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)+S.Ndn.$$

Diese Gleichung gilt während der ganzen Dauer des Stoßes.

Wenn wir bedenken, daß, wie schon §. 258 bemerkt ist, die Dauer des Stoßes stets sehr klein ist, daß also die Lage der Theile des Systems gegen einander während der Dauer desselben nur sehr kleine Aenderungen erleidet; so sehen wir leicht, daß wir ohne merklichen Irrthum in dieser Gleichung die Variationen δx, δy, δz, δn während der Dauer des Stoßes als constant in Beziehung auf die Zeit t ansehen dürfen. Wenn wir unter dieser Annahme in Beziehung auf die Zeit integrieren, so erhalten wir

$$S.m[(u-U)\delta x+(v-V)\delta y+(w-W)\delta z]$$
$$=S.\int dt(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)+S.\int dt.N\delta n,$$

wo U, V, W die Werthe der Geschwindigkeiten u, v, w in dem Augenblicke sind, in welchem der Stoß beginnt und die durch $\int$ bezeichneten Integrale von diesem Augenblicke bis zum Ende der Zeit t genommen werden müssen. Auch diese Gleichung muß während der ganzen Dauer des Stoßes gelten.

Nun haben aber 1) die durch X, Y, Z bezeichneten Kräfte, welche stetig auf das System wirken, bei praktischen Anwendungen gewöhnlich nur sehr kleine Werthe gegen den des Drucks, den wir durch N bezeichnet haben und der aus der Einwirkung des Stoßes hervorgeht; es kann

darum das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung gegen das zweite vernachlässigt werden; 2) kann der Werth des zweiten Ausdrucks $S.\int dt.N\delta n$ immer $=0$ angenommen werden; denn um dies annehmen zu können, braucht man nur vorauszusetzen, daß bei der Verschiebung des Systems, welcher die Variationen δx, δy, δz entsprechen, die Oberflächen der Körper beim Zusammenstoß sich nicht trennen, sondern nur auf einander hingleiten, weil die Kräfte dann je zwei gleiche mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftete virtuelle Momente haben. Die vorige Gleichung kann demnach auch so geschrieben werden

$$S.m[(u-U)\delta x+(v-V)\delta y+(w-W)\delta z]=0.$$

§. 340. Sollen ferner die je nach der physischen Beschaffenheit der Körper verschiedenen Resultate unterschieden werden; so nehmen wir erstens den in §. 271 und 272 gegebenen Erklärungen gemäß auf die unelastischen Körper Rücksicht, bei denen der Stoß geendigt ist, wenn die Eindrücke ihr Maximum erreicht haben und die zur Berührung gebrachten Oberflächen der beiden Körper sich nicht in dem Augenblicke trennen, in welchem der Stöß zu Ende ist, sondern nur auf einander hingleiten können. Man kann in diesem Falle, wenn man den Augenblick, in welchem der Stoß beendigt ist, betrachtet, statt der Variationen δx, δy, δz in die obige Gleichung die Wege dx, dy, dz hineinsetzen, welche die materiellen Punkte in dem Zeitelement dt wirklich durchlaufen haben, das dem Augenblick der Beendigung des Stoßes folgt. Offenbar muß man also δx, δy, δz durch udt, vdt, wdt ersetzen; denn diese Größen leisten in unserm Falle den beiden Bedingungen Genüge, daß sie 1) statt der während der ganzen Dauer des Stoßes als constant angenommenen Werthe von δx, δy, δz genommen werden können und daß sie

2) die Summe der virtuellen Momente $N\delta n$ zu Null machen. Darnach giebt die obige Gleichung

$$S.m[u^2+v^2+w^2-(Uu+Vv+Ww)]=0,$$

wo u, v, w die Geschwindigkeiten am Ende des Stoßes sind. Der Ausdruck

$$S.m[U^2+V^2+W^2-(u^2+v^2+w^2)]$$

giebt den Unterschied zwischen der Summe der lebendigen Kräfte der Theile des Systems im Anfange und am Ende des Stoßes. Addiert man zu diesem Ausdruck die mit 2 multiplicierte linke Seite der vorigen Gleichung, so ändert man seinen Werth nicht und man erhält ihn in der Form

$$S.m[(U-u)^2+(V-v)^2+(W-w)^2].$$

Es folgt daraus, daß die durch Einwirkung eines Stoßes zwischen unelastischen Körpern verlorene lebendige Kraft der lebendigen Kraft gleich ist, welche zu der resp. von jedem der Körper des Systems verlorenen Geschwindigkeit gehört. Dieser Satz ist unter dem Namen Carnotscher Lehrsatz bekannt. Es ergiebt sich daraus, daß ein Stoß zwischen den Körpern eines Systems immer die Wirkung hat, daß sich dessen lebendige Kraft vermindert.

§. 341. Dieser Satz gilt gleichfalls, wenn es sich um den Stoß zwischen solchen harten Körpern, wie sie in §. 275 beschrieben sind, handelt. Denn nach §. 258 unterliegt die Bewegung des Systems der Bedingung, daß die endlichen Größen der Bewegung, welche augenblicklich durch Einwirkung des Stoßes verloren sind und die resp. durch $m(U-u)$, $m(V-v)$, $m(W-w)$ dargestellt werden, den Größen der Bewegung das Gleichgewicht halten, welche den nach entgegengesetzten Richtungen genommenen auf das System wirkenden Kräften angehören. Nun sind die durch den Stoß hervorgebrachten Kräfte, — nämlich der Druck,

den die durch den Stoß in Berührung gekommenen Körper auf einander ausüben und den wir oben durch N bezeichnet haben —, immer zu je zweien einander gleich und wirken einander direct entgegen längs derselben geraden Linie. Sie heben sich gegenseitig auf und das erwähnte Gleichgewicht wird einfach ausgedrückt durch die Gleichung

$$S.m[(U-u)\delta x+(V-v)\delta y+(W-w)\delta z]=0.$$

Dies ist dieselbe Gleichung, welche wir oben gefunden haben. Man muß hier die stetig auf das System wirkenden Kräfte ganz unberücksichtigt lassen, weil diese Kräfte in unendlich kleiner Zeit nur unendlich kleine Größen der Bewegung ergeben.

§. 342. Wir unterscheiden zweitens, wie in §. 272, den Fall, daß der Stoß zwischen zwei völlig elastischen Körpern wirkt; daß ferner in dem Augenblicke, in welchem der Stoß beendet ist, die in den Körpern durch Einwirkung des Stoßes gebildeten Eindrücke völlig verschwunden sind. Man darf hier nicht mehr die in §. 340 gemachte Annahme in Betreff der Größen δx, δy, δz machen, weil die Oberflächen der Körper sich unmittelbar nach dem Stoße trennen und darum die in Berührung gebrachten Punkte nicht mehr nach dem Stoße dieselben Geschwindigkeiten nach Richtung der beiden Oberflächen gemeinsamen Normale haben. Es haben aber dann die einzelnen Integrale $\int dt.N\delta n$ in der Gleichung des §. 339, wenn man sie vom Anfange bis zum Ende des Stoßes nimmt, den Werth 0, weil die Variationen δn in Beziehung auf die Zeit als constant angenommen sind und die Integrale aus je zwei gleichen, mit entgegengesetzten Vorzeichen behafteten Theilen bestehen. Es folgt daraus, daß in diesem Falle die Summe der lebendigen Kräfte der Theile des Systems nach dem Stoße den nämlichen Werth wieder erhält, den sie vor den Stoße hatte.

Dieser Satz gilt jedoch nicht für alle Fälle, daß ein Stoß zwischen völlig elastischen Körpern stattfindet, sondern nur in dem besondern Falle, daß die Körper am Ende des Stoßes völlig ihre ursprüngliche Gestalt wieder angenommen haben.

§. 343. Wir können noch auf den Fall Rücksicht nehmen, daß in einem System von Körpern in Bewegung eine plötzliche Explosion eintritt, daß also plötzlich für sehr kurze Zeit zwischen zwei oder mehr Körpern des Systems große Kräfte zur Wirkung kommen, welche diese Körper von einander zu entfernen streben. Alsdann ist, wie in §. 339, während der ganzen Dauer der Explosion

$$S.m[(u-U)\delta x+(v-V)\delta y+(w-W)\delta z]=0,$$

vorausgesetzt, daß man den Variationen δx, δy, δz Werthe ertheilt, die der am Ende dieses §. gegebenen Bedingung Genüge leisten. Man thut dieses offenbar, wenn man δx, δy, δz durch die Wege Udt, Vdt, Wdt ersetzt, welche die materiellen Punkte kraft der Geschwindigkeiten, die sie im Augenblicke des Beginns der Explosion erhalten, durchlaufen. Demnach ist hier

$$S.m[Uu+Vv+Ww-(U^2+V^2+W^2)]=0.$$

Man leitet daraus ebenso, wie in §. 340, ab

$$S.m[u^2+v^2+w^2-(U^2+V^2+W^2)]$$
$$=S.m[(u-U)^2+(v-V)^2+(w-W)^2].$$

Es folgt daraus, daß die vom Systeme in Folge der Explosion gewonnene lebendige Kraft der lebendigen Kraft gleich ist, welche zu den bezüglich von jedem der Körper des Systems gewonnenen Geschwindigkeiten gehört. In Folge einer Explosion vermehrt sich stets die vorhandene lebendige Kraft des Systems.

§. 344. Unter der in §. 336 gemachten Einschränkung, daß man nämlich die Bedingungen des Systems als unabhängig von der Zeit annimmt, kann man in der am Ende von §. 325 gegebenen Gleichung $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ durch $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ersetzen und erhält so

$$S.m\frac{d\xi d^2\xi+d\eta d^2\eta+d\zeta d^2\zeta}{dt^2}=S.(Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta),$$

und wenn man in Beziehung auf die Zeit integriert

$$S.m\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}=2S.\int Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta+\text{Const.}$$

Das Princip der lebendigen Kräfte hat also gleichfalls Gültigkeit, wenn man es auf die Bewegungen der materiellen Punkte in Beziehung auf ihren Schwerpunkt anwendet.

§. 345. Wir wollen schließlich noch eine Bemerkung hinzufügen, die sich auf die in §. 252 und 253 gegebenen Erklärungen bezieht. Aus der in §. 337 gegebenen Gleichung

$$S.mv^2-S.mv_0{}^2=2(\Pi-\Pi_0)$$

schließt man, daß die Summe der lebendigen Kräfte des Systems gleichzeitig mit der Function Π ihre größten und kleinsten Werthe hat: da nun diese letztere Function sich im Zustande des Maximums oder Minimums befindet, wenn $d\Pi=0$, oder

$$S.(Xdx+Ydy+Zdz)=0,$$

oder auch

$$S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0;$$

so folgt daraus dieser bemerkenswerthe Satz: bei der Bewegung eines Systems hat die lebendige Kraft ihr Maximum oder Minimum erreicht, wenn das System sich in solchen Lagen befindet oder solche Figuren bildet, daß die auf dasselbe wirkenden Kräfte sich einander das Gleichgewicht halten. So fällt die Aufgabe, die Lagen eines Systems

zu suchen, in denen zwischen den gegebenen Kräften Gleichgewicht ist, mit der zusammen, die Lagen zu bestimmen, in welchen die durch Einwirkung derselben Kräfte hervorgebrachte lebendige Kraft des Systems ein Maximum oder Minimum ist.

Es läßt sich ferner leicht beweisen 1) daß das Gleichgewicht beständig und dauernd ist (d. h. daß das System sich in solcher Lage befindet, daß es von selbst nur durch Einwirkung der darauf wirkenden Kräfte in das Gleichgewicht zurückfällt, wenn eine geringe Verschiebung eingetreten ist), sobald der Werth der lebendigen Kraft ein Maximum ist; 2) daß das Gleichgewicht unbeständig ist, wenn der Werth der lebendigen Kraft ein Minimum ist. Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem in §. 237 gegebenen Beweise des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. Denn wenn wir durch p, p', p'' ... die bezüglichen Entfernungen zwischen den festen und beweglichen Flaschenzügen A und B, A' und B', A'' und B'' ... bezeichnen; so ist die Summe der die Flaschenzüge mit einander verbindenden Seillängen offenbar $Pp + P'p' + P''p''$ ... Ist ferner c die constante Länge der Theile des Seiles, die von einem festen Flaschenzuge zum andern gehend über gleichfalls feste Rollen geleitet sind; bezeichnen wir endlich durch s den Theil des Seiles, der jenseits der letzten Rolle liegt und an welchem das Gewicht befestigt ist: so läßt sich die constante Gesammtlänge des Seiles ausdrücken durch

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots + c + s;$$

und wenn wir annehmen, daß die Größen P, P', P'' ... von p, p', p'' ... unabhängig sind (man darf dies thun, wenn man eine nur sehr kleine Verschiebung des Systems berücksichtigt); so wird die Größe $Pp + P'p' + P''p''$ ..., wenn sie mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen

wird, auf die oben durch Π bezeichnete zurückgeführt. Deshalb kann man die Länge auch ausdrücken durch

$$-\Pi + c_{,} + s.$$

Wenn nun der Werth von Π, folglich auch der von s Maxima sind, so bewirkt eine beliebige kleine Verschiebung des Systems ein Steigen des Gewichts; und da das Gewicht stets die Neigung hat zu sinken, so kommt das System von selbst in seine ursprüngliche Lage zurück. Wenn im Gegentheil die Werthe von Π und s Minima sind, so bringt eine solche Verschiebung das Gewicht zum Sinken; es wird also fortfahren zu sinken und das System wird sich mehr und mehr aus der Lage entfernen, in der es sich im Gleichgewichtszustande befand.

§. 346. Dieser Satz läßt sich auch so beweisen. Denken wir uns ein System in solcher Lage, daß die auf dasselbe wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind und daß der Werth der Function Π, den wir durch Π_0 bezeichnen wollen, ein Maximum oder Minimum ist. Wenn sodann jedem Punkte m eine sehr kleine Geschwindigkeit v_0 ertheilt wird, so daß das System anfängt sich mit einer im Anfange gleichfalls sehr kleinen lebendigen Kraft zu bewegen, welche ausgedrückt wird durch $S.mv_0$; so wird nach einer gewissen Zeit die lebendige Kraft des Systems gegeben durch die Gleichung

$$S.mv^2 = S.mv^2_0 + 2(\Pi - \Pi_0).$$

Bezeichnen wir aber die den Punkten m zugehörenden Coordinaten x, y, z am Ende der Zeit t durch $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$, ebenso die einem andern Punkte des Systems m' zugehörenden Coordinaten x', y', z' am Ende der Zeit t durch $x_0' + \xi'$, $y_0' + \eta'$, $z_0' + \zeta'$ u. s. f.; so kann man nach Cap. XIII des Lehrb. der Diff. Rechn. die Function Π in solcher Reihe entwickeln

$$\Pi_0 + \varpi' + \varpi'' + \varpi''' + \ldots,$$

daß der erste Ausdruck ϖ' allein die ersten Potenzen der Veränderlichen ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' enthält, das zweite Glied ϖ'' die Quadrate und die Producte von je zwei derselben Veränderlichen, das dritte Glied ϖ''' die dritten Potenzen und die Producte aus je drei derselben, u. s. f. Wenn nun der Annahme nach die Werthe x_0, y_0, z_0; x_0' ... die Function Π zu einem Maximum oder Minimum machen; so ist nach I. §. 147 u. ff. des Lehrb. der Diff. Rechn. $\varpi' = 0$ und die obige Gleichung reduciert sich auf

$$S.mv^2 = S.mv_0{}^2 + 2(\varpi'' + \varpi''' + \ldots).$$

In dieser Formel ist die Größe $2(\varpi'' + \varpi''' \ldots)$ nothwendig negativ, wenn die Function Π ein Maximum, positiv, wenn sie ein Minimum ist. Die linke Seite $S.mv^2$ ist stets positiv; es kann deshalb 1) wenn ein Maximum vorliegt der absolute Werth von $2(\varpi'' + \varpi''' \ldots)$ niemals den der Annahme nach sehr kleinen Werth von $S.mv_0{}^2$ übersteigen; und dies führt uns zu dem Schlusse, daß auch die Veränderlichen ξ, η, ζ; ξ' ... nur sehr kleine Werthe annehmen können; 2) wenn ein Minimum vorliegt, wird der Werth jener Größe durch keine Bedingung begränzt, folglich auch nicht die Werthe jener Veränderlichen. Unmittelbare Untersuchung der Bewegung des Systems würde wirklich beweisen, daß in diesem zweiten Falle die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte mehr und mehr sich zu vergrößern streben.

Princip der kleinsten Wirkung.

§. 347. Wir gehen aus von der Größe,

$$S.m\int ds.v,$$

die wir erhalten, wenn die Masse jedes materiellen Punktes

mit dem Integral $\int ds.v$ multipliciert wird. Wir bezeichnen mit ds das Element des Weges, welchen der Punkt von der Masse m in der Zeit dt durchlaufen hat, durch v die Geschwindigkeit des nämlichen Punktes am Ende der Zeit t. Das Integral $\int ds.v$ wird zwischen zwei gegebenen Punkten der Bahn genommen, welche im Raume feste Lagen haben und durch die der materielle Punkt m hindurchgehen muß. Die Bahn, welche der Punkt zwischen den beiden festen Punkten durchläuft, ist nicht von vornherein bestimmt; sie hängt von den Bedingungen des Systems und von den auf dasselbe wirkenden Kräften ab. Dann ist das Princip der geringsten Wirkung folgendes: für ein beliebiges System und beliebige Kräfte sind die durch die verschiedenen materiellen Punkte beschriebenen Bahnen zwischen festen gegebenen Grenzen stets derartig, daß die Größe $S.m\int ds.v$ ein Maximum oder ein Minimum ist (d. h. größer oder kleiner, als für jede andere mögliche Bahn), wenn die Integrale $\int ds.v$ zwischen denselben Grenzen genommen sind.

Dieser Satz gilt allein in dem Falle, daß die Bedingungen des Systems unabhängig von der Zeit sind und daß die Function $S.(Xdx + Ydy + Zdz)$ ein genaues Differential einer Function Π der Veränderlichen x, y, z ist. Um ihn zu beweisen, genügt es nachzuweisen, daß stets

$$\delta S.m\int ds.v = 0.$$

Es ist aber

$$\delta S.m.ds.v = S.m(v\delta ds + ds\delta v) = S.m\left(\frac{ds}{dt}\delta ds + \tfrac{1}{2}\,dt\,\delta v^2\right),$$

und einerseits

$$\delta ds = \frac{dx.\delta dx + dy.\delta dy + dz.\delta dz}{ds};$$

zweitens nach §. 336

$$\tfrac{1}{2}S.m\delta v^2 = \delta\Pi = S.(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = S.m\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2};$$

wenn man also diese beiden Werthe substituiert:

$$\delta S.m.ds.v = S.md\left(\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt}\right).$$

Integriert man dann in Beziehung auf t; so ist das unbestimmte Integral der rechten Seite $S.m\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt}$, also eine Größe, welche an beiden Grenzpunkten $= 0$ ist, da man an den beiden Endpunkten der Bahn, weil sie gegeben sind, hat $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$. So ist zwischen diesen Grenzen

$$\delta . S.m\int ds.v = 0$$

und damit ist der Satz bewiesen.

§. 348. Da übrigens die obige Gleichung auch auf diese Form gebracht werden kann

$$\delta S.m\int dt.v^2 = 0,$$

so läßt sich dies Grundgesetz auch so aussprechen: das in Beziehung auf die Zeit genommene Integral der lebendigen Kräfte des Systems zwischen zwei gegebenen Lagen ist stets das größt- oder das kleinstmögliche.

XXIII. Berechnung der Wirkung der Maschinen.

§. 349. Man benutzt die Maschinen um durch sie die unmittelbare Wirksamkeit der Kräfte der Menschen oder Thiere zu ersetzen. Die Wirkung einer Maschine berechnen heißt die Größe der Arbeit abschätzen, welche man durch sie unter gegebenen Umständen verrichten kann.

Trotz der großen Verschiedenheit der Verrichtungen, zu welchen man die Maschinen anwendet, haben alle dennoch gemeinsame Elemente, die es möglich machen jene

Wirkung auf eine allgemeine und regelmäßige Art zu berechnen. Denn während eine Arbeit durch eine Maschine verrichtet wird (d. h. die zu einem bestimmten Zwecke angewandte Thätigkeit einer Maschine ein bestimmtes Resultat herbeiführt), findet nothwendigerweise ein Druck gegen einen Punkt statt, der in derselben Zeit nach Richtung dieses Drucks einen Raum durchläuft. Es muß beides, der ausgeübte Druck und der nach Richtung des Drucks durchlaufene Raum zusammenkommen, damit eine Arbeit von bestimmtem Werthe verrichtet werde.

Am einfachsten zeigt sich die Wahrheit dieses Grundgesetzes an den Verrichtungen, durch welche man schwere Körper emporzuziehen pflegt, z. B. bei den Maschinen, vermittels derer man Wasser emporhebt. Uebrigens erkennt man sie leicht auch bei den meisten andern Maschinen; überall findet in dem Punkte, in welchem die Arbeit verrichtet wird, ein Druck statt, den jedesmal ein Theil der Maschine, welcher sich nach Richtung dieses Drucks bewegt, ausübt.

§. 350. Im allgemeinen kann man bei den Maschinen unterscheiden: 1° die Wirksamkeit des **Krafterregers** oder **Motors**, d. h. der Ursache, die im Anfange die Bewegung der Theile der Maschine hervorgebracht hat, diese Bewegung unterhält, und verhindert, daß sie durch entgegenwirkende Ursachen aufgehoben wird; 2° die Wirksamkeit des **Widerstandes**, welche unmittelbar aus der Arbeit hervorgeht, welche die Maschine verrichten kann, und indem sie der Wirksamkeit des Krafterregers direct entgegenwirkt, beständig strebt die Bewegung der Maschinentheile aufzuheben.

Nach dem vorigen §. besteht die Wirksamkeit des Krafterregers darin, daß ein constanter oder veränderlicher Druck gegen einen Punkt der Maschine wirkt, welcher sich nach

Richtung dieses Drucks bewegt; und die Wirksamkeit des Widerstandes besteht darin, daß ein Punkt der Maschine gegen einen fremden Körper einen Druck ausübt und sich nach Richtung dieses Drucks bewegt. In den meisten Fällen kann man dieses unmittelbar veranschaulichen, indem man die Wirksamkeit des Kraftmotors durch ein vertical sinkendes Gewicht, das dem vom Motor ausgeübten Druck gleich, und an dem Ende eines nach Richtung dieses Drucks gespannten Seiles befestigt ist; und ebenso die Wirksamkeit des Widerstandes durch ein vertical aufsteigendes Gewicht ersetzt.

§. 351. Nachdem nachgewiesen ist, worin die Wirksamkeit der Krafterreger auf die Maschinen besteht, daß sie nämlich an denselben die Bewegung hervorbringen und unterhalten; und worin die Wirksamkeit der Maschinen auf die Widerstände besteht, damit sie die der Maschine angemessene Arbeit verrichten; nachdem gezeigt ist, daß diese Wirksamkeit mit dem Sinken oder Steigen eines schweren Körpers verglichen werden kann: ergiebt sich leicht, wie man es anzufangen hat die Wirkung der Maschinen zu berechnen. Augenscheinlich muß die Wirksamkeit des sinkenden Gewichts, d. h. die Arbeit, welche nöthig ist um ein Gewicht zu erheben, um so größer sein, je größer dies letztere Gewicht und je größer diese Höhe ist. Bezeichnen wir folglich

durch P, Q die als constant angenommenen Kräfte, die in einer Maschine auf die Ansatzpunkte resp. des Motors und des Widerstandes wirken;

durch p, q die in bestimmter Zeit durch diese Punkte bezüglich nach Richtung der Kräfte P und Q durchlaufenen Räume;

so drücken die Zahlen Pp und Qq die Wirksamkeit des Motors und die Größe der Arbeit oder die von der Maschine in derselben Zeit ausgeübte Wirkung aus.

Falls die Kräfte P und Q nicht constant sind, müssen sie als Function der bezüglich nach ihren Richtungen durchlaufenen Räume p und q gegeben sein und dann sind die Integrale

$$\int P dp \text{ und } \int Q dq,$$

zwischen den Grenzen genommen, welche für die Augenblicke, wo die Arbeit anfängt und beendet ist, sich ergeben, Ausdruck für die Wirksamkeit des Krafterregers und für die Wirkung der Maschine.

Vergleicht man hiermit die in §. 144 gegebenen Erklärungen; so ergiebt sich, daß die Größen der Einwirkung, welche aus der Bewegung der Maschine in den Ansatzpunkten des Kraftmotors und des Widerstandes hervorgehen, die Zahlenverhältnisse für die Wirksamkeit des Krafterregers oder die durch die Maschine verrichtete Arbeit geben; es sind also Producte aus Gewichtseinheiten in Längeneinheiten die Zahlen, welche die Wirksamkeit des Krafterregers oder die Wirkung der Maschine darstellen. Man kann diese Zahlen auf solche Krafteinheiten zurückführen, die eine Gewichtseinheit zur Höhe einer Längeneinheit erheben können; da nach deutschem Maßsysteme sie also ein Pfund einen Fuß hoch heben — dies sind die Einheiten, auf welche man gewöhnlich die Zahlen reducirt, wenn man nicht etwa an das französische Maßsystem sich anschließend sie durch Kilogramm und Meter ersetzt —, so benennt man sie auch wohl mit dem Namen Fußpfund.

§. 352. Bei einer Maschine in Bewegung bildet die Gesammtheit der sie bildenden Körper ein System, auf welches äußere Kräfte einwirken, besonders der Druck, welchen der Motor nach Richtung der Bewegung, und der Druck, welchen der Widerstand nach der entgegengesetzten Richtung ausübt; natürlich können auch andere äußere

Einwirkungen dazu kommen, z. B. der Widerstand der Medien, in welchen sich die Theile der Maschine zu bewegen haben; ferner die innern Einwirkungen, welche die Bewegung der Maschinentheile hervorbringt und die immer der Richtnng der Bewegung entgegenwirken. Mit Berücksichtigung aller dieser Kräfte kann man allgemeiner die Bedingungen aufstellen, denen der Gang einer Maschine unterworfen ist.

Wenn wir die in §. 351 gewählten Bezeichnungen beibehalten und ferner bezeichnen durch

- F den Druck, welchen ein aus der Bewegung der Maschine hervorgehender Widerstand ausübt;
- f den Raum, der am Ende der Zeit t nach Richtung des Drucks F durchlaufen ist;
- m die Masse eines der materiellen Punkte, welche die Maschinentheile bilden;
- v die Geschwindigkeit dieses Punktes am Ende der Zeit t:

so ist nach §. 336

$$\tfrac{1}{2} S.mv^2 = \int Pdp - S.\int Fdf - \int Qdq + \text{Const.} \qquad \text{(A)}$$

Der Ausdruck $S.\int Fdf$ ist die Summe aller Integrale $\int Fdf$, welche durch den an verschiedenen Punkten durch die Bewegung der Maschine hervorgerufenen Widerstand gegeben sind, welchen die Wirksamkeit des Krafterregers überwinden muß.

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf die Zeit, so erhält man

$$S.mvdv = Pdp - S.Fdf - Qdq. \qquad \text{(B)}$$

Hieran knüpfen wir folgende Bemerkungen.

§. 353. In den ersten Augenblicken, nachdem eine Maschine in Bewegung gesetzt ist, wo also die Schnelligkeit

ihrer Theile progressiv wächst, ist die rechte Seite der Gleichung (B) nothwendig positiv, die Wirksamkeit des Motors also größer als die der widerstrebenden Kräfte. Immer jedoch strebt diese rechte Seite $=0$ zu werden, indem der Natur dieser Einwirkungen gemäß der Druck des Motors kleiner, der des Widerstandes größer wird in dem Maße, wie die Geschwindigkeit v wächst. Wenn dies der Fall ist, so folgt aus Gleichung (B) $dv=0$; und wenn die durch P, Q und F bezeichneten Kräfte ihre Werthe ungeändert behalten, so erleidet die Geschwindigkeit der Maschinentheile keine Aenderung und die Maschine bewegt sich beständig mit gleichförmiger Bewegung.

Diese Gleichförmigkeit der Bewegung, welche dadurch herbeigeführt wird, daß die Kräfte P, Q und F als unveränderlich von dem Augenblicke an angenommen sind, in welchem ihre Werthe der Gleichung

$$Pdp - S.Fdf - Qdq = 0 \qquad (C)$$

Genüge leisten, findet wirklich in vielen Fällen statt. Gewöhnlich tritt sie schon sehr kurze Zeit nach Anfang der Bewegung der Maschine ein. Offenbar haben alsdann der constante Druck, den der Kraftmotor ausübt, und der Widerstand solche Werthe, daß sie sich einander nach den Gesetzen der Statik an der Maschine das Gleichgewicht halten. Hiernach muß man das Verhältniß feststellen, das zwischen der Wirksamkeit des Motors einerseits und des Widerstands anderseits bestehen muß, damit die Maschine ihre Arbeit verrichten kann. Ferner ist die Größe der Einwirkung, welche der Kraftmotor in einem beliebigen Zeitraume in seinem Ansatzpunkte hervorbringt, der Größe der Einwirkung gleich, welche im Ansatzpunkte des Widerstandes hervorgebracht ist, addiert zu den Größen des Widerstandes, die den innern Einwirkungen angehören: wären demnach

diese letztern = 0 (was jedoch unmöglich ist); so würde die Größe der Bewegung, die der Kraftmotor hervorbringt, der durch den Widerstand hervorgebrachten gleich sein.

§. 354. Wenn die Werthe für den Druck des Motors und des Widerstandes nicht constant sind; so ist die Bewegung der Maschine nicht gleichförmig und es treten regelmäßige periodische Veränderungen ein, welche dadurch bewirkt werden, daß der Druck des Krafterregers abwechselnd größer oder kleiner ist, als nöthig ist um dem Druck des Widerstands das Gleichgewicht zu halten. Im ersten Falle, wenn der Druck des Motors zu groß ist, ist die rechte Seite der Gleichung (B) in §. 352 positiv, die Geschwindigkeit der Maschinentheile wächst mit der Zeit; wenn im Gegentheile der Druck des Motors kleiner ist, als nöthig wäre um das Gleichgewicht zu halten; so wird die rechte Seite der Gleichung (B) negativ, die Geschwindigkeit nimmt mit der Zeit ab. Die Bewegung ist also derartig, daß die Geschwindigkeit abwechselnd wächst und abnimmt und nach beiden Seiten um einen mittlern Werth Schwankungen macht. Die Maxima und Minima der Geschwindigkeit finden in den Augenblicken statt, wo $dv = 0$, wo also die in Gleichung (C) ausgesprochne Bedingung besteht, daß der Druck des Motors und der des Widerstandes sich an der Maschine das Gleichgewicht halten können. Die Geschwindigkeit entfernt sich um so mehr von ihrem mittlern Werthe unter sonst gleichen Umständen, je kleiner die Masse und die jedesmalige Geschwindigkeit der Maschinentheile sind.

Wenn die Bewegung in regelmäßiger Weise stattfindet; so kehren dieselben Werthe des Drucks des Motors und des Widerstandes, wie auch der Geschwindigkeit jedes Maschinentheils im Verlaufe jeder der Perioden wieder, in welche man die Dauer der Bewegung theilen kann. Folglich ist der Werth der lebendigen Kraft am Ende einer dieser

Perioden derselbe, den sie im Anfange gehabt hatte. Man kann daraus nach der Gleichung (A) des §. 352 schließen, daß, wenn man in einen Zeitraum eine ganze Zahl solcher Perioden zusammenfaßt, die Größe der Einwirkung, welche der Motor hervorgebracht hat, stets den Größen der Einwirkung gleich ist, welche verbraucht sind um die Arbeit der Maschine zu verrichten und um den aus der Bewegung der Maschinentheile resultirenden innern Widerstand zu überwinden.

Wenn also, wie wir in §. 353 angenommen haben, die Bewegung einer Maschine gleichförmig ist; so muß zwischen dem Druck des Motors und dem des Widerstandes die Beziehung bestehen, daß sie sich das Gleichgewicht halten. Wenn nach der Annahme dieses §. die Bewegung periodische Schwankungen hat; so muß dasselbe Verhältniß bestehen, weil die Größen der Einwirkung des Motors und des Widerstandes jedesmal im Verlaufe einer Periode dieselbe Größe haben. Man darf darum die Gleichung aufstellen

$$\int P dp = S . \int F df + \int Q dq. \qquad \text{(D)}$$

wenn die Integrale für einen Zeitraum genommen werden, in dessen Anfange und Ende die mit v bezeichneten Geschwindigkeiten dieselben Werthe haben. Man muß diese Gleichung so ansehen, als ob sie eine Art dynamisches Gleichgewicht ausdrückte, nach welchem die Größe der Einwirkung des Motors immer bestimmt werden kann, der eine bestimmte Arbeit verrichtet.

§. 355. Gewöhnlich gilt es bei Berechnung von Maschinen die Frage zu beantworten: wie groß muß die Wirksamkeit des Motors sein um eine bestimmte Wirkung hervorzubringen; es kann aber auch die Frage aufgeworfen werden: welche Wirkung wird eine Maschine hervorbringen, wenn ein Motor von gegebener Wirksamkeit auf dieselbe

einwirkt. Diese Frage läßt sich nach den vorhergehenden Erklärungen beantworten; man hat stets den Druck zu bestimmen, den Krafterreger und Widerstand an ihren Ansatzpunkten ausüben; zugleich muß man die Werthe der innern Kräfte schätzen können, z. B. der Reibung und ähnlicher Arten von Widerstand, welche die Einwirkung des Kraftmotors überwinden muß. Wenn diese Kräfte in Zahlenwerthen gegeben oder berechnet sind, so ist man stets im Stande mit Hülfe der in den vorhergehenden Capiteln entwickelten Grundgesetze der Statik und Dynamik die in §. 353 und 354 im allgemeinen angegebenen Beziehungen zu finden. Wir können hier natürlich nicht die Berechnung des innern Widerstandes in verschiedenen Fällen genauer im einzelnen ausführen, da dies specielles Eingehen erfordern würde; nur eine Bemerkung wollen wir beifügen, die sich auf den Fall bezieht, daß bei der Bewegung der Maschine Stöße eintreten.

Man muß auf die in §. 339 u. ff. gegebenen Erklärungen zurückgehen; daraus ergiebt sich, daß man die Aenderung, welche die Bewegung der Maschine durch Einwirkung des Stoßes erlitten hat, als abhängig von der physischen Beschaffenheit der Körper anzusehen hat. Während nun diese Aenderung deshalb gewöhnlich als unbekannt angenommen werden muß oder wenigstens eine specielle Untersuchung in Beziehung auf jeden der die Maschine bildenden Körper verlangt; nimmt man bei praktischer Anwendung meistens an, daß die Körper, welche gegen einander stoßen, die in §. 340 aufgestellten Eigenschaften haben, daß also die Berührungspunkte der Oberflächen zweier zusammengestoßener Körper sich nicht in dem Augenblicke trennen, welcher dem Stoße folgt: darnach hat das System in Folge des Stoßes so viel an lebendiger Kraft verloren, als den von den Körpern verlorenen Geschwindigkeiten

angehört. Wenn man so verfährt, wie in §. 275 und am Ende des §. 341 angegeben ist; so kann man stets die aus den Stößen hervorgehenden Aenderungen der Geschwindigkeit bestimmen: um dahin zu gelangen muß man gewöhnlich den besondern Widerstand berücksichtigen, der nur im Augenblicke des Stoßes eintritt und mit seinem Aufhören endigt. Man kann demnach den aus einem Stoße hervorgehenden Verlust an lebendiger Kraft berechnen. Bei der Berechnung der Wirksamkeit der Maschine verfährt man nun so: Wenn wir durch m die Masse eines Theils der Maschine, durch v die Differenz zwischen den Geschwindigkeiten, welche dieser Theil vor und nach dem Stoße hat, bezeichnen; so ist der Verlust an lebendiger Kraft in Folge des Stoßes nach dem vorigen und nach §. 341, $= S.mv^2$ in der ganzen Maschine, indem man durch S bezeichnet, daß man alle Verluste an lebendiger Kraft mv^2 der gesammten Maschine summiert hat. Man schließt daraus, daß die während der Dauer des Stoßes eingetretenen innern Kräfte eine Größe der Einwirkung hervorgebracht haben, für welche der numerische Ausdruck $\frac{1}{2}S.mv^2$ ist. Wenn man demnach auf die in §. 354 angegebene Art verfährt, so muß man in Gleichung (D) zur rechten Seite jene Größe der Einwirkung addieren und erhält so

$$\int Pdp = S\int Fdf + \tfrac{1}{2}S.mv^2 + \int Qdq. \qquad \text{(E)}$$

Es muß nämlich jedesmal der Motor die Größe der Einwirkung nach Richtung der Bewegung wieder hervorbringen, welche durch die innern Kräfte verbraucht wird, die aus dem Stoße hervorgehen. Dabei müssen wir den Zeitraum, in Beziehung auf den die Integrale genommen werden, so bestimmen, daß alle Theile der Maschine die Geschwindigkeit wieder erhalten haben, die sie im Anfange des Zeitraums hatten; so daß die lebendige Kraft des Systems keine Aenderung erlitten hat.

§. 356. Der Hauptnutzen der Maschinen vom ökonomischen Standpunkt aus betrachtet, besteht darin, daß sie es möglich machen die theurere Menschenkraft durch die der Thiere und der natürlichen Agentien überhaupt (wie der Fall schwerer Körper, der Druck des Windes, die Veränderungen des Zustandes, welche die Wärme hervorbringt, u. s. w. sind) zu ersetzen. Den Namen Krafterreger giebt man überhaupt jedem natürlichen Agens, dessen Einwirkung eine Maschine in Gang setzen und vermittels derselben eine Arbeit verrichten kann. Demnach sind die Wirksamkeiten eines oder mehrerer Thiere, die des herabfließenden Wassers, dessen Druck man auf eine Fläche von bestimmter Größe wirken läßt, die aus der Verbrennung einer bestimmten Kohlenmenge resultirende Wirkung u. s. w. Kraftmotoren.

Wenn ein Motor gegeben ist; so ist offenbar die Größe der Arbeit, welche man durch ihn hervorbringen kann, begrenzt. Eine aufmerksame Prüfung zeigt ferner, daß ein und derselbe Motor sehr verschiedene Arbeitsgrößen verrichten kann, je nachdem man seine Wirksamkeit anwendet. Wenn wir, wie oben, durch P den Druck des Motors, durch V die Geschwindigkeit seines Ansatzpunktes bezeichnen; so bringt er in der Zeiteinheit die Größe der Einwirkung PV hervor. Da nun die Größen P und V zu einander in dem Verhältnisse stehen, daß die eine wächst, wenn die andere abnimmt; so muß man die Wirksamkeit des Motors so regeln, daß das Product PV den größtmöglichen Werth erhält.

Ein Mensch oder ein Thier kann täglich nur eine bestimmte Zeit T arbeiten: der Ausdruck für ihr Tagewerk ist also PVT.

Auch die drei Factoren dieses Products sind in der Art von von einander abhängig, daß nothwendigerweise der eine abnimmt, wenn die beiden andern zunehmen; es

muß darum auch hier jeder derselben so bestimmt werden, daß man bei gleicher Ermüdung die größtmögliche Arbeitsgröße erlangt.

XXIV. Hauptgleichungen des Gleichgewichts eines der Einwirkung beliebiger Kräfte unterliegenden Fluidums.

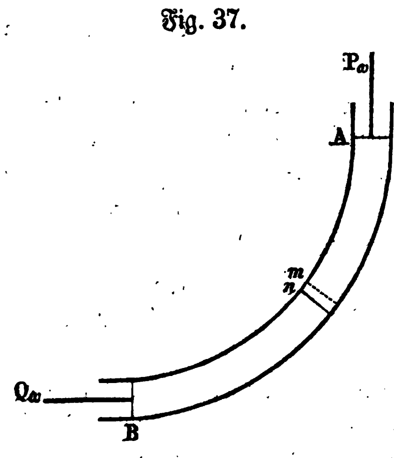
§. 357. Mit dem Namen Fluidum bezeichnet man Körper, welche fast ohne Widerstand eine Bewegung ihrer Theile gegen einander oder gegen die festen Wände der Gefäße, in denen sie enthalten sind, erlauben. Man unterscheidet zwei Arten von Fluiden: 1⁰ die tropfbarflüssigen, deren Volumen bei gleicher Masse fast unveränderlich ist und die in einem beliebig gestalteten Gefäße enthalten sein können, ohne einen Druck gegen die Wände des Gefäßes auszuüben. 2⁰ die luftförmigen Fluida, deren Volumen bei gleicher Masse sich ohne Ende verändern kann, deren Theile ohne Aufhören sich in Folge einer innern Abstoßung von einander zu entfernen streben und die in Folge davon immer gegen die Wände der Gefäße, in denen sie enthalten sind, einen gewissen Druck ausüben.

Wenn wir oben bemerkten, daß die Fluida dem Unternehmen ihre Theile zu bewegen, fast keinen Widerstand entgegensetzen; so müssen wir allerdings anerkennen, daß diese Theile gewöhnlich einen gewissen Grad von Cohäsion zeigen und nicht ohne merklichen Druck von einander getrennt werden können; aber da dieser Widerstand doch gegen die Kräfte, welche die Haupterscheinungen hervorbringen, sehr klein sind; so ist es zweckmäßig bei Aufstellung der mechanischen Theorie des Gleichgewichts und

der Bewegungen der Flüssigkeiten denselben unberücksichtigt zu lassen.

§. 358. Wir betrachten zunächst den Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeitsmenge AB, die in einer festen Röhre enthalten ist (Fig. 37). Der Querschnitt dieser Röhre sei gleichmäßig und unendlich klein, die Axe derselben eine beliebige gegebene Linie. An den beiden Enden der flüssigen Säule, A und B, mögen sich zwei bewegliche Kolben befinden, auf diese äußere Kräfte wirken und außerdem mögen die Theilchen des Fluidums der Einwirkung beliebiger Kräfte unterliegen.

Fig. 37.



Gemäß der Natur des Fluidums kann ein beliebiger Schnitt nm, dessen Dicke wir als unendlich klein annehmen, frei nach Richtung der Axe der Röhre hin und her gleiten. Auf diesen Schnitt wirkt nun: 1° der Druck der obern Flüssigkeit auf die Oberfläche m; 2° der nach der entgegengesetzten Seite wirkende Druck des untern Theils der Flüssigkeit auf die Fläche n; 3° die auf die ihn bildenden Theilchen wirkenden Kräfte. Man darf annehmen, daß die Richtung des Drucks von oben und von unten mit der Tangente zusammenfällt, welche in der Mitte des Schnitts an die Axe der Röhre gelegt ist, da die Dicke desselben unendlich klein sein soll. Wenn Gleichgewicht eintreten soll, muß also der Unterschied zwischen dem Druck von beiden Seiten der Kraft gleich und entgegengesetzt sein, die auf die Theilchen des Schnitts

wirkt, nachdem sie nach Richtung der an die Axe der Röhre gezogenen Tangente zerlegt ist. Wir wollen nun bezeichnen durch

ω die constante und unendlich kleine Oberfläche des Querschnitts der Röhre;

x, y, z die rechtwinklichten Coordinaten des Punkts ihrer Axe, in welchem der Schnitt nm liegt;

s die Länge dieser Axe von einem festen Punkte aus bis zu diesem selben Punkte gerechnet;

a, b die Werthe der Abscisse x in den Punkten A und B der Axe der Röhre, wo die flüssige Säule auf beiden Seiten begrenzt ist;

P, Q die auf die Flächeneinheit bezogenen Werthe des auf die letzten Schnitte A und B ausgeübten Drucks;

p den auf die Flächeneinheit bezogenen Werth des auf die Fläche des Schnitts mn geübten Drucks, welcher am Ende des Bogens s liegt;

ϱ die Dichtigkeit des Fluidums oder die Masse der Volumenseinheit in der Stelle der Röhre, wo der Schnitt mn liegt;

X, Y, Z die Werthe der Geschwindigkeiten, welche die auf die Theilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte diesen an derselben Stelle der Röhre in der Zeiteinheit nach Richtung der Coordinaten x, y, z ertheilen können.

Dabei sei die Figur der Röhre durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z gegeben, wobei x als unabhängige Variable genommen ist; der Bogen s sei gleichfalls durch eine Function von x bestimmt, ebenso der Druck p der Flüssigkeit, die Dichtigkeit ϱ und die Componierenden

X, Y, Z der Kraft, welche auf die Theilchen der Flüssigkeit wirkt.

Da das Volumen des Schnitts $mn = \omega ds$, seine Masse $\varrho \omega ds$ ist; so ist der auf diesen Schnitt geübte Druck nach Richtung der Axe der Röhre zerlegt,

$$\varrho \omega ds \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right).$$

Da ferner die Werthe des gegen die beiden Flächen wirkenden Drucks sind

$$p\omega \text{ und } (p + dp)\omega;$$

so wird das Gleichgewicht des Schnitts ausgedrückt durch die Gleichung

$$dp = \varrho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

der die Werthe von p, ϱ und x in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit Genüge leisten müssen.

§. 359. Es folgt aus der letzten Gleichung

$$p = \text{Const.} + \int \varrho (Xdx + Ydy + Zdz);$$

da man in die unter dem Integrationszeichen stehende Größe statt y, z, ϱ, X, Y, Z ihre Werthe in x hineinsetzen muß, so ist das Integral hier ein gewöhnliches Integral in Beziehung auf die eine Veränderliche x. Da der obige Ausdruck natürlich auch für die beiden Endflächen A und B der Flüssigkeitssäule gilt; so ist erstens der Werth des auf einen beliebigen Schnitt m geübten Drucks

$$p = P + \int_a^x \varrho (Xdx + Ydy + Zdz);$$

zweitens drückt die Gleichung

$$Q = P + \int_a^b \varrho (Xdx + Ydy + Zdz)$$

die Bedingung des Gleichgewichts für die Flüssigkeitssäule

aus. Diese läßt also die Werthe der Kräfte X, Y, Z völlig willkührlich, wofern man nur den Unterschied zwischen dem Druck an den beiden Endflächen P und Q nach Belieben bestimmen kann.

§. 360. Wenn auf die Theilchen der Flüssigkeit keine Kraft wirkt, so reduciert sich die vorige Gleichung auf

$$P = Q;$$

es muß also der auf den beiden Endflächen von außen nach entgegengesetzten Seiten wirkende Druck $P\omega$ und $Q\omega$ gleich sein. Diese Resultate passen gleichmäßig auf den Fall, daß eine tropfbare Flüssigkeit von constanter oder veränderlicher Dichtigkeit und daß luftförmige Flüssigkeit in der Röhre enthalten ist. Im ersten Falle kann Gleichgewicht selbst dann bestehen, wenn die beiden Kräfte P und $Q = 0$ gesetzt werden; im zweiten Falle ist dies nicht möglich, weil bei luftförmigen Flüssigkeiten die innern Kräfte ohne Aufhören streben das Volumen des Körpers zu vergrößern.

§. 361. Wenn wir nun annehmen, daß ein beliebiges geschlossenes Gefäß mit tropfbarer Flüssigkeit angefüllt ist, ohne daß die Theilchen durch eine Kraft bewegt werden; so erhält sich die Flüssigkeit unbewegt, ohne daß die Theile derselben gegen einander oder gegen die Wand des Gefäßes einen Druck ausüben. Wird dann ein unendlich kleiner Theil der Wand des Gefäßes A (Fig. 38) zu einem beweglichen Kolben von der Fläche ω, auf den von außen ein Druck $P\omega$ wirkt, dessen Werth auf die Flächeneinheit des Kolbens bezogen P ist; so erfordert das Gleichgewicht des in dem Gefäße enthaltenen Fluidums, daß dieser Druck auf alle Theile übertragen werde; d. h. wenn man eine beliebige Ebene B hindurchlegt, so üben die beiden durch diese Ebene geschiedenen Theile der Flüssigkeit auf einander einen Druck

Fig. 38.

aus, dessen Werth auf die Flächeneinheit bezogen, für alle Theile der Ebene der nämliche ist und zwar $= P$. Denn jeder unendlich kleine Theil dieser Ebene von der Fläche ω kann als das Ende der Flüssigkeitssäule AB angesehen werden, deren Dicke gleichmäßig, deren Gestalt beliebig ist. Denkt man sich, diese Säule wäre in einer festen Röhre enthalten; so muß nach dem vorigen §., wenn sie im Gleichgewicht sein soll, gleicher Druck an jedem Ende wirken und beide müssen direct entgegengesetzt sein. Man könnte auch das Ende B der Säule AB in einen Punkt der Wand des Gefäßes verlegen. Legt man demnach eine Ebene von beliebiger Richtung durch einen beliebigen Punkt des Innern des Fluidums oder der Wand; so üben stets die beiden durch diese Ebene geschiedenen Theile auf einander einen Druck aus, dessen Werth bei gleicher Oberfläche dem Werthe des Drucks gleich ist, der auf den beweglichen in A liegenden Kolben wirkt.

§. 362. Wenn also in der Wand des Gefäßes noch andere Oeffnungen sich befinden, die durch bewegliche Kolben von den Oberflächen ω', ω'', ω''' ... geschlossen sind; so müssen, wenn das Gleichgewicht erhalten werden soll, auf dieselben von außen bezüglich die Kräfte $P\omega'$, $P\omega''$, $P\omega'''$ ... wirken.

Auch durch Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten erhält man unmittelbar das Verhältniß, das unter den Kräften bestehen muß, wenn sie sich an dem durch die feste Wand des Gefäßes und die tropfbare Flüssigkeit gebildeten Systeme das Gleichgewicht halten sollen. Ist nämlich dem Fluidum eine sehr kleine Bewegung ertheilt, in Folge deren die Kolben ω, ω', ω'' ...

sich selbst parallel um die Größen δp, $\delta p'$, $\delta p''$ ... bewegt sind; bezeichnen wir ferner den von außen auf die Flächeneinheit jeder Oberfläche resp. wirkenden Druck durch P, P', P''...; so giebt nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten folgende Gleichung die Bedingung des Gleichgewichts

$$P\omega . \delta p + P'\omega' . \delta p' + P''\omega'' . \delta p'' + \ldots = 0;$$

Da nun der Gesammtinhalt des Fluidums unveränderlich sein soll; so müssen die Bewegungen der Theile des Systems auch der Gleichung

$$\omega \delta p + \omega' \delta p' + \omega'' \delta p'' + \ldots = 0$$

Genüge leisten, welche neben der vorigen nur dann bestehen kann, wenn man hat

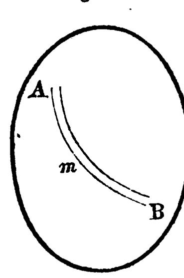
$$P = P' = P'' = \ldots$$

§. 363. Ist das Gefäß mit einem luftförmigen Fluidum gefüllt, auf dessen Theilchen keine Kraft wirkt; so muß unsere Untersuchung über den Gleichgewichtszustand desselben einen ähnlichen Gang nehmen, wie in §. 361. Wenn Gleichgewicht bestehen soll, also die Theile des Fluidums unbeweglich sein sollen; so muß auf alle Punkte der Flüssigkeit und von allen Seiten her ein constanter Druck wirken, und derselbe Druck muß auch gegen die feste Wand des Gefäßes wirken; dieser Druck ist Folge der Repulsivkraft der Theilchen der Flüssigkeit. Wenn also in der Wand des Gefäßes eine oder mehrere durch bewegliche Kolben geschlossene Oeffnungen vorhanden sind; so müssen natürlich auf dieselben, wenn das Gleichgewicht unverändert bestehen soll, von außen Kräfte wirken, die dem Producte der Kolbenfläche in den Werth des auf die Einheit bezogenen innern Drucks gleich sind.

§. 364. Wenn ferner Kräfte von beliebiger Art auf die Theilchen einer tropfbaren oder luftförmigen Flüssigkeit

wirken, und sich einander das Gleichgewicht halten; so bleibt dasselbe offenbar unverändert, auch wenn die ganze Flüssigkeit fest wird mit Ausnahme der beliebig gestalteten Säule AB in Fig. 39, deren Dicke wir als gleichmäßig und unendlich klein annehmen. Da diese Säule, die man so ansehen kann, als ob sie in einer festen Röhre enthalten wäre, im Gleichgewicht ist und die Anwendung der in §. 358 entwickelten Gleichungen gestattet: so erhält man

Fig. 39.



$$dp = \varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

und

$$p = \text{Const.} + \int\varrho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Die Coordinaten x, y, z muß man als die Coordinaten der Linie ansehen, welche die Axe der Röhre bildet. In dem Ausdrucke für p ist die Constante offenbar der Werth des Drucks an dem Ende A der Röhre, das dem Anfangspunkt der Coordinaten am nächsten liegt. Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen, welche durch den Endpunkt A und einen beliebigen Punkt der Röhre gebildet sind; so giebt die obige Gleichung den Druck, welcher im Punkte m nach Richtung der Röhrenaxe wirkt. Nimmt man dasselbe Integral zwischen den Grenzen, welche zu den Endpunkten A und B gehören; so giebt die Gleichung den am Ende B wirkenden Druck. Ehe man integriert, muß man natürlich statt y, z, dy und dz in die Formel $\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ die Werthe dafür in x und dx, welche aus den Gleichungen der Röhrenaxe abgeleitet sind, hineinsetzen; man hat also nur in Beziehung auf die eine Veränderliche x zu integrieren und kann darum den Werth des Integrals immer bestimmen.

§. 365. Da jedoch zwischen den beiden willkührlich gewählten Punkten A und B eine unendliche Menge von beliebig gestalteten Röhren gedacht werden und auf alle die oben entwickelten Sätze angewandt werden können; so folgt, daß der Werth für den am Ende B wirkenden Druck, den man mittels der oben angegebenen Operation findet, stets der nämliche sein muß, welche Gestalt man der Röhre zugeschrieben haben mag. Folglich hat die Function $\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ die Eigenschaft, daß das Integral $\int\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ zwischen Grenzen genommen, welche zwei beliebige Punkte der Flüssigkeit bestimmen, immer denselben Werth hat, welche Beziehung auch zwischen den Veränderlichen x, y, z angenommen sein mag. Es kann demnach dies Integral auch genommen werden, ohne daß man statt y und z ihre Werthe in x hineinsetzt, d. h. die Function $\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ muß das genaue Differential einer Function der drei Veränderlichen x, y, z sein. Nach II. §. 366 des Lehrb. der Diff. Rechn. muß man deshalb folgende Gleichungen haben

$$\frac{d.\varrho X}{dy} = \frac{d.\varrho Y}{dx}, \quad \frac{d.\varrho X}{dz} = \frac{d.\varrho Z}{dx}, \quad \frac{d.\varrho Y}{dz} = \frac{d.\varrho Z}{dy},$$

denen die Kräfte X, Y, Z in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit Genüge leisten müssen, damit das Fluidum unter Einwirkung dieser Kräfte im Gleichgewicht bleibt.

Falls das Fluidum tropfbar und gleichförmig, demnach von constanter Dichtigkeit ist, muß, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, die Function $Xdx + Ydy + Zdz$ ein genaues Differential einer Function der drei Veränderlichen x, y, z sein; es müssen demnach die Componierenden der auf jedes Theilchen wirkenden Kraft Genüge leisten den Gleichungen

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Meist leisten die Naturkräfte diesen Bedingungen Genüge. Dies ist jedesmal der Fall, wenn Kräfte, die von festen Mittelpunkten ausgehen und deren Intensität Function der Entfernung der Theilchen von diesen Mittelpunkten ist, oder zwischen den Theilchen selbst wirkende Kräfte, deren Intensität Function ihrer gegenseitigen Entfernung ist, auf die Theilchen der Flüssigkeit wirken.

§. 366. Wenn den Gleichungen in §. 365 Genüge geleistet ist, so ist der auf die Flächeneinheit bezogene Werth des Drucks in einem beliebigen Punkte des Fluidums durch die Gleichung gegeben:

$$p = \text{Const.} + \int \varrho \, (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Dieser Ausdruck p ist demnach gerade die Function der drei Veränderlichen x, y, z, deren genaues Differential die Größe $\varrho (Xdx + Ydy + Zdz)$ ist. So wird also in einem Fluidum im Gleichgewichte der Druck stets durch eine endliche Function der Coordinaten ausgedrückt, auf die man die Punkte des Fluidums bezogen hat. Dieser Druck wirkt augenscheinlich gleich stark nach jeder Richtung; denn der Ausdruck für p ist nur eine Function der Coordinaten des Punkts m und ist von der Richtung der Röhrenaxe AB in diesem Punkte völlig unabhängig. Der Werth der Constante wird nach dem Werthe des Drucks in einem bestimmten Punkte der Flüssigkeit bestimmt; dieser Werth muß gegeben sein. Setzt man dann in die letzte Formel statt x, y, z die bestimmten Coordinatenwerthe eines bestimmten Punkts der Flüssigkeit; so findet man den in diesem Punkte nach allen Richtungen wirkenden Druck.

§. 367. Dieselbe Formel giebt auch den gegen die Wand eines Gefäßes geübten Druck, das die Flüssigkeit enthält: dieser Druck wird natürlich durch den Widerstand der Wand aufgehoben. Wenn aber die Oberfläche des

§. 365. Da jedoch zwischen den beiden willkührlich gewählten Punkten A und B eine unendliche Menge von beliebig gestalteten Röhren gedacht werden und auf alle die oben entwickelten Sätze angewandt werden können; so folgt, daß der Werth für den am Ende B wirkenden Druck, den man mittels der oben angegebenen Operation findet, stets der nämliche sein muß, welche Gestalt man der Röhre zugeschrieben haben mag. Folglich hat die Function $\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ die Eigenschaft, daß das Integral $\int\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ zwischen Grenzen genommen, welche zwei beliebige Punkte der Flüssigkeit bestimmen, immer denselben Werth hat, welche Beziehung auch zwischen den Veränderlichen x, y, z angenommen sein mag. Es kann demnach dies Integral auch genommen werden, ohne daß man statt y und z ihre Werthe in x hineinsetzt, d. h. die Function $\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ muß das genaue Differential einer Function der drei Veränderlichen x, y, z sein. Nach II. §. 366 des Lehrb. der Diff. Rechn. muß man deshalb folgende Gleichungen haben

$$\frac{d.\varrho X}{dy} = \frac{d.\varrho Y}{dx}, \quad \frac{d.\varrho X}{dz} = \frac{d.\varrho Z}{dx}, \quad \frac{d.\varrho Y}{dz} = \frac{d.\varrho Z}{dy},$$

denen die Kräfte X, Y, Z in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit Genüge leisten müssen, damit das Fluidum unter Einwirkung dieser Kräfte im Gleichgewicht bleibt.

Falls das Fluidum tropfbar und gleichförmig, demnach von constanter Dichtigkeit ist, muß, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, die Function $Xdx + Ydy + Zdz$ ein genaues Differential einer Function der drei Veränderlichen x, y, z sein; es müssen demnach die Componierenden der auf jedes Theilchen wirkenden Kraft Genüge leisten den Gleichungen

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Meist leisten die Naturkräfte diesen Bedingungen Genüge. Dies ist jedesmal der Fall, wenn Kräfte, die von festen Mittelpunkten ausgehen und deren Intensität Function der Entfernung der Theilchen von diesen Mittelpunkten ist, oder zwischen den Theilchen selbst wirkende Kräfte, deren Intensität Function ihrer gegenseitigen Entfernung ist, auf die Theilchen der Flüssigkeit wirken.

§. 366. Wenn den Gleichungen in §. 365 Genüge geleistet ist, so ist der auf die Flächeneinheit bezogene Werth des Drucks in einem beliebigen Punkte des Fluidums durch die Gleichung gegeben:

$$p = \text{Const.} + \int \varrho\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Dieser Ausdruck p ist demnach gerade die Function der drei Veränderlichen x, y, z, deren genaues Differential die Größe $\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ ist. So wird also in einem Fluidum im Gleichgewichte der Druck stets durch eine endliche Function der Coordinaten ausgedrückt, auf die man die Punkte des Fluidums bezogen hat. Dieser Druck wirkt augenscheinlich gleich stark nach jeder Richtung; denn der Ausdruck für p ist nur eine Function der Coordinaten des Punkts m und ist von der Richtung der Röhrenaxe AB in diesem Punkte völlig unabhängig. Der Werth der Constante wird nach dem Werthe des Drucks in einem bestimmten Punkte der Flüssigkeit bestimmt; dieser Werth muß gegeben sein. Setzt man dann in die letzte Formel statt x, y, z die bestimmten Coordinatenwerthe eines bestimmten Punkts der Flüssigkeit; so findet man den in diesem Punkte nach allen Richtungen wirkenden Druck.

§. 367. Dieselbe Formel giebt auch den gegen die Wand eines Gefäßes geübten Druck, das die Flüssigkeit enthält: dieser Druck wird natürlich durch den Widerstand der Wand aufgehoben. Wenn aber die Oberfläche des

Fluidums sich nicht gegen eine feste Wand stützt und kein äußerer Druck darauf wirkt; so muß im Gleichgewichtszustande der oben gegebene Ausdruck für $p = 0$ werden, wenn man statt x, y, z die dieser Oberfläche angehörenden Werthe setzt. Dieses erfordert, daß man habe

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten x, y, z der freien Oberfläche des Fluidums Genüge leisten und dieselbe muß als Differentialgleichung derselben angesehen werden. Es ergiebt sich daraus eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit dieser Oberfläche, daß nämlich in jedem Punkte die Richtung ihrer Normale mit der Richtung der auf die Theilchen der Flüssigkeit wirkenden Kraft zusammenfällt.

Diese Differentialgleichung ist jedoch nicht allein die Gleichung der Oberfläche, welche in allen ihren Punkten keinerlei Druck erleidet; sondern auch die jeder andern Fläche, deren Punkte alle der Einwirkung eines Drucks von beliebigem constantem Werthe unterliegen. Solche Flächen nennt man Niveauflächen; dieselben haben im Innern einer Flüssigkeit die bemerkenswerthe Eigenschaft, daß sie immer die Richtung der auf die Flüssigkeitstheilchen wirkenden Kraft unter rechtem Winkel schneiden.

Wenn die Oberfläche eines Fluidums sich nicht gegen eine feste Wand stützt, aber ein senkrechter constanter Druck auf alle Theile derselben wirkt, wie dies der Fall ist, wenn der Druck der Atmosphäre auf die Oberfläche wirkt; so muß doch die Gestalt derselben im Gleichgewichtszustande offenbar der oben angegebenen Bedingung Genüge leisten; dieselbe muß eine Niveaufläche sein.

Da ferner die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

immer, entweder ohne weiteres, oder nachdem sie mit dem

Factor ϱ multipliciert ist, integrierbar sein muß; so wird die Oberfläche eines Fluidums im Gleichgewichtszustande stets durch eine endliche Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z dargestellt.

§. 368. Nach der Bemerkung des §. 365 ist den meisten nicht fingierten Fällen die Function $Xdx+Ydy+Zdz$ das vollständige Differential einer Function von x, y, z, die wir durch Π bezeichnen wollen. Es ist also

$$dp = \varrho\,.\,d\Pi \quad \text{und} \quad p = \text{Const.} + \int \varrho\,.\,d\Pi.$$

Da nun im Gleichgewichtszustande der Flüssigkeit $\varrho\,.\,d\Pi$ das genaue Differential einer Function von x, y, z sein muß und dies nur unter der Bedingung möglich ist, daß auch ϱ eine Function von Π ist; so muß auch p eine Function von ϱ sein: beide Werthe verändern sich zugleich oder bleiben zugleich constant, wenn man von einem Punkte des Fluidums zu einem andern übergeht. Im Gleichgewichtszustande muß also die Dichtigkeit ebenso wohl, als der Druck in der ganzen Ausdehnung jeder Niveaufläche constant sein. Wenn also die Theile einer Flüssigkeit nicht dieselbe Dichtigkeit haben; so lagern sie sich, wenn sie unter Einwirkung beliebiger Kräfte ins Gleichgewicht treten, so, daß die Theile, welche dieselbe Dichtigkeit haben, Schichten bilden, welche durch die Niveauflächen geschieden werden. Diese Schichtbildung ist, wenn Gleichgewicht bestehen soll, unerläßlich.

In einer ungleichförmigen, tropfbaren Flüssigkeit ist Gleichgewicht möglich, ohne daß nach einem bestimmten Gesetze die Dichtigkeit von einer Niveauschicht zur andern sich ändert; nur müssen, wenn das Gleichgewicht beständig sein soll, die dichtesten Schichten der Flüssigkeit den Mittelpunkten am nächsten liegen, von denen die auf die Theilchen wirkenden Attraktionskräfte ausgehen.

§. 369. In einem gleichartigen luftförmigen Fluidum dürfen wir die Dichtigkeit dem Druck proportional annehmen

und dieselbe ändert sich demnach von einer Niveauschicht zur andern nach einem bestimmten Gesetze. Setzt man also

$$p = k\varrho,$$

wo k ein constanter Coefficient ist; so haben wir nach der letzten Gleichung

$$k\frac{dp}{p} = d\Pi;$$

oder wenn man integriert

$$p = A.e^{\frac{\Pi}{k}}, \quad \text{deshalb} \quad \varrho = \frac{A}{k}.e^{\frac{\Pi}{k}}.$$

A ist hier eine willkührliche Constante und e die Basis der Neperschen Logarithmen.

§. 370. In den Aufgaben, die auf nicht fingierten Verhältnissen beruhen, darf man die Dichtigkeit eines luftförmigen Fluidums dem Druck nur unter der Bedingung proportional setzen, daß die Temperatur in der ganzen Ausdehnung des Fluidums constant ist. Gewöhnlich ist die Dichtigkeit Function der Temperatur und des Drucks. Da für den Gleichgewichtszustand die rechte Seite der Gleichung $dp = \varrho d\Pi$ ein genaues Differential sein muß; so muß auch ϱ eine Function von Π sein und die Integration jener Gleichung giebt das Gesetz, nach welchem der Druck, folglich auch die Dichtigkeit sich ändert. Ist aber ϱ eine Function der Temperatur, so muß es auch p sein: folglich sind der Druck und die Temperatur beide zusammen constant und beide ändern sich zusammen im Innern eines Fluidums. Bei einer luftförmigen Flüssigkeit kann Gleichgewicht also nur dann eintreten, wenn die Temperatur in allen Punkten einer und derselben Niveaufläche gleichförmig ist. Dasselbe gilt auch von den tropfbaren Flüssigkeiten, deren Dichtigkeit sich gleichfalls merklich mit der Temperatur ändert; so erklärt es sich, daß die Theile eines solchen

Fluidums allein durch Einwirkung einer ungleichen Vertheilung der Temperatur sich bewegen.

§. 371. Um eine Anwendung der obigen Resultate zu geben, wollen wir annehmen, daß die Theilchen einer Flüssigkeit sämmtlich gegen einen festen Mittelpunkt hingezogen werden, den wir als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen und zwar mit einer Kraft, welche der Entfernung der Theilchen vom Mittelpunkte proportional ist, und daß dieselben zugleich um die Axe der z mit derselben Winkelgeschwindigkeit sich drehen. Bezeichnet man mit F die vom Mittelpunkt ausgehende Anziehungskraft für die Einheit der Masse und der Entfernung; so ist der Werth derselben in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, $= -F\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und ihre drei Componierenden nach Richtung der Axen sind bezüglich $-Fx$, $-Fy$, $-Fz$. Nennt man die Winkelgeschwindigkeit v, so ist der Werth der Centrifugalkraft in demselben Punkte $= v^2\sqrt{x^2+y^2}$ und die drei Componierenden derselben nach Richtung der Axen sind bezüglich v^2x, v^2y und 0. Demnach ist hier die Function, die wir in den vorigen §. durch $Xdx+Ydy+Zdz$ darstellten, $= -F(xdx+ydy+zdz)+v^2(xdx+ydy)$; es ist also die Differentialgleichung der Niveauflächen und der Oberfläche der Flüssigkeit, wenn sie sich im Gleichgewichte befindet,

$$F(xdx+ydy+zdz)-v^2(xdx+ydy)=0.$$

Da augenscheinlich die Flüssigkeit hier die Gestalt eines Rotationskörpers um die Axe der z anzunehmen strebt; so genügt es eine der Meridianlinien zu bestimmen. Setzt man also $y=0$, so erhält man

$$F(xdx+zdz)-v^2xdx=0;$$

durch Integration findet man

$$F(x^2 + z^2) - v^2x^2 = A;$$

A ist hier eine willkührliche Constante. Die Figur, welche das Fluidum anzunehmen strebt, ist also die eines Rotationsellipsoids um die kleine Axe, wenn $F > v^2$ ist. Im entgegengesetzten Falle erhält man ein Rotationshyperbeloid um die imaginäre Axe. Die an der Oberfläche der Erde liegenden Flüssigkeiten unterliegen, wie man ohne großen Fehler annehmen kann, der Einwirkung einer Centralkraft, die der Entfernung proportional wirkt (vergl. §. 203) und einer Centrifugalkraft, die gegen jene Centralkraft gehalten sehr klein ist: folglich nähert sich die Gestalt, welche die Oberfläche der Meere anzunehmen strebt, sehr der eines Rotationsellipsoids, dessen Radius am Aequator ein wenig größer ist, als der an den Polen.

XXV. Gleichgewicht der schweren tropfbaren Flüssigkeiten.

§. 372. Eine gleichartige tropfbare Flüssigkeit, die in einem Gefäße enthalten ist, unterliege der Einwirkung der Schwerkraft, d. h. einer constanten Kraft, deren Richtung der Verticallinie parallel ist. Behält man die in §. 358 u. ff. angewandten Bezeichnungen bei und nimmt die Ebene der xy als horizontal an, wobei die z von oben nach unten gezählt werden; so muß man bei Anwendung der entwickelten Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$ setzen, wo man durch g, wie immer, die den schweren Körpern in der Zeiteinheit durch die Schwerkraft ertheilte Geschwindigkeit bezeichnet. Da also die Function $Xdx + Ydy + Zdz$ sich auf gdz reduciert, und den Gleichungen in §. 365, welche die Bedingungen enthalten, unter denen das Gleichgewicht

überall bestehen kann, damit Genüge geleistet ist; so wird der in §. 366 gegebene Ausdruck für p

$$p = P + \varrho g z;$$

P bezeichnet eine Constante. Eine tropfbare Flüssigkeit bleibt unter alleiniger Einwirkung der Schwerkraft immer im Gleichgewichte, wenn nur die Wand des Gefäßes dem Druck widersteht, dessen Werth in dieser Formel gegeben ist.

§. 373. Legen wir in einem geschlossenen Gefäße von beliebiger Gestalt, das mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, die Ebene der xy durch den höchsten Punkt der Wand; so ist P der Werth des in diesem Punkte wirkenden Drucks. P ist aber hier augenscheinlich $= 0$, wofern man keinen Druck angewendet hat um die oben im Gefäße liegende Oeffnung zu schließen, durch welche die Flüssigkeit in das Gefäß gegossen ist. Der Druck im Innern des Gefäßes ist daher einfach durch den Ausdruck gegeben

$$p = \varrho \cdot g z.$$

Wenn jedoch die Oeffnung durch einen Kolben geschlossen ist, auf welchen ein Druck wirkt; so ist der Ausdruck für den Druck im Innern des Gefäßes

$$p = P + \varrho \cdot g z,$$

wo P der Werth des Drucks, dividiert durch die Fläche des Kolbens oder der auf die Flächeneinheit bezogene Werth des ausgeübten Drucks ist. In jedem Falle erleiden alle Punkte einer durch die Flüssigkeit hindurchgelegten Horizontalebene denselben Druck; in zwei verschiedenen Horizontalschichten verhält sich der Druck, wie die Höhen der beiden Schichten.

§. 374. Die Gleichung der Oberfläche eines Fluidums in einem oben offnen Gefäße ist nach §. 367,

$$dz = 0, \quad \text{oder} \quad z = \text{Const.}$$

Es ist also eine Horizontalebene. Wenn wir sie als die Ebene der xy annehmen, so ist die Constante P in dem Ausdruck $p = P + \varrho . gz$ der auf die Oberfläche des Fluidums geübte Druck. Man müßte demnach $P = 0$ setzen, wenn ein Druck auf dieselbe nicht wirkte; dies ist aber in Wirklichkeit stets der Fall, da der Luftdruck stets berücksichtigt werden muß. Indem wir also annehmen, daß P der atmosphärische Druck auf die Flächeneinheit ist; so können wir den in irgend einem Punkte des Fluidums wirkenden Druck stets in zwei Theile zerlegen: 1⁰ in den Luftdruck P, der ohne sich zu ändern auf jeden Punkt der Flüssigkeit wirkt; 2⁰ in den aus der Einwirkung der Schwerkraft hervorgehenden Druck, für den ϱgz der Ausdruck ist; dieser letzte Theil ist offenbar dem Gewichte einer Säule gleich, welche zur Grundfläche die Flächeneinheit, zur Höhe die Entfernung des betreffenden Punktes von der freien Oberfläche der Flüssigkeit hat. Auch in diesem Falle ist der Werth des Drucks für alle Punkte jedes Horizontalschnitts derselbe.

Diese Resultate sind von der Gestalt des Gefäßes völlig unabhängig; sie bestehen unverändert selbst in dem Falle, daß die freie Oberfläche des Fluidums in mehrere Theile getheilt ist, welche durch Scheidewände von einander getrennt sind. Immer müssen die verschiedenen Theile der Oberfläche in derselben Horizontalebene liegen und alle in einer und derselben Horizontalebene liegenden Punkte des Fluidums erleiden denselben Druck.

Ist in einem Gefäße von der in Fig. 40 dargestellten Figur der Theil MN, der über dem Niveau MM der freien Oberfläche, auf welche der atmosphärische Druck wirkt, liegt, mit der Flüssigkeit gefüllt; so strebt der Theil der Flüssigkeit MN bis zur gleichen Höhe mit dem andern Theile herabzusinken; weil aber auf diesen der Luftdruck

Fig. 40.

wirkt, so muß der Theil MN um die Höhe $z = \frac{P}{\varrho g}$ sich über das Niveau MM erheben. Ist die Höhe MN kleiner, als diese Größe; so übt die Flüssigkeit von unten nach oben gegen die Wand NN einen Druck $= P - \varrho . gz$ aus, worin $z =$ der Höhe MN. Die Höhe, bis zu welcher das Fluidum sich in dem Theile MN über das Niveau M erheben kann (natürlich muß über diesem Theile ein vollkommen leerer Raum bleiben), ist dem atmosphärischen Druck proportional und kann dazu dienen denselben zu messen.

§. 375. Natürlich müssen, wenn ein Gefäß mehrere tropfbare schwere Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit enthält, im Gleichgewichtszustande diese sich in Schichten, die durch Horizontalebenen getrennt sind, abgelagert haben, so daß in jeder dieser Schichten sich nur solche Theile befinden, welche die nämliche Dichtigkeit haben; das Gleichgewicht ist ferner nur dann beständig, wenn diese Schichten in der Ordnung liegen, daß die schwereren jedesmal einen tiefern Platz im Gefäße einnehmen. Der Werth des Drucks ist gegeben durch die Formel

$$p = P + g \int \varrho . dz;$$

demnach ist auch in diesem Falle der zweite Theil des Drucks, der von der Schwere des Fluidums herrührt, dem Gewicht des geraden Prisma gleich, welches in der Flüssigkeit abgeschnitten zur Grundfläche die Flächeneinheit, zur Höhe die Entfernung des betreffenden Punkts von der Oberfläche hat.

Berechnung des auf die Gefäßwände wirkenden Drucks.

§. 376. Wir wollen diese Aufgabe allgemein behandeln und annehmen, daß eine Fläche, gegen welche das Fluidum drückt, durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

gegeben ist und daß der Druck bestimmt werden soll, den ein durch einen gegebenen Umriß begrenzter Theil dieser Fläche zu tragen hat. Wie in dem vorhergehenden §, nehmen wir hier die freie Oberfläche des Fluidums als Ebene der xy an und zählen die z von oben nach unten von dieser Ebene aus. Wir bezeichnen ferner durch

$$y = \varpi(x), \quad z = \varphi(x), \quad z = \psi(y)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Ebenen der xy, xz und yz von dem Umriß des in Frage kommenden Theils der Fläche: wenn eine dieser Gleichungen gegeben ist, so kennt man auch sogleich die beiden andern wegen der Gleichung der Fläche. Läßt man nun zunächst den atmosphärischen Druck P unberücksichtigt; so trägt nach §. 374 ein beliebiges unendlich kleines Element ω der gegebenen Fläche, welches in der Entfernung z unter der Ebene der xy liegt, in Folge des Gewichts der Flüssigkeit einen

Druck $= g\omega \int_0^z dz \,.\, \varrho$, der nach Richtung der Normale

auf diese Fläche wirkt. Der Druck, welcher demgemäß auf die verschiedenen Elemente der Fläche wirkt, bildet ein Kräftesystem, das man stets leicht auf zwei den x und den y parallel wirkende Horizontalkräfte und auf eine Verticalkraft reducieren kann.

Bezeichnen wir nämlich durch γ, β, α die Winkel, welche die Ebene des Elements ω mit den Ebenen der xy, xz, yz oder auch die Normale mit den Axen der x, y, z

einschließt; so sind die drei diesen Axen parallelen Componierenden dieses unendlich kleinen Drucks

$$\cos.\gamma.g\omega\int_0^z dz.\varrho,\quad \cos.\beta.g\omega\int_0^z dz.\varrho,\quad \cos.\alpha.g\omega\int_0^z dz.\varrho;$$

und da $\omega.\cos.\gamma$, $\omega.\cos.\beta$, $\omega.\cos.\alpha$ resp. die Projectionen der Fläche ω auf den Ebenen der xy, xz und yz sind; so verhalten sich die Componierenden des unendlich kleinen Drucks ebenso, wie die Projectionen der Fläche ω auf derselben Ebene. Es folgt daraus: 1) daß die Resultierende aus den Componierenden, die der Axe der x parallel sind, ihrer Größe und Richtung nach auf die ganze gegebene Fläche ebenso wirkt, als wenn sie unmittelbar auf die Projection dieser Fläche auf der Verticalebene der yz wirkte; 2) daß die Resultierende aus den der Axe der y parallelen Componierenden gleichfalls der Größe und Richtung nach auf die ganze Fläche ebenso wirkt, als wenn sie auf die Projection dieser Fläche auf der Verticalebene der xz wirkte; 3) daß endlich die Resultierende aus den verticalen Componierenden das Gewicht der Säule der Flüssigkeit ist, welche zwischen der gegebenen Fläche, der Horizontalebene der freien Oberfläche des Fluidums und dem verticalen Cylindermantel enthalten ist, der den Umriß der gegebenen Fläche auf der letztern Ebene projiciiert. Die Richtung dieser letzten partiellen Resultierenden geht offenbar durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit.

§. 377. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Aufgabe, den Druck, den eine gegebene Fläche erleidet, zu berechnen, sich darauf reduciert den Druck zu bestimmen, den ein Stück einer Verticalebene erleidet und das Gewicht einer Flüssigkeitssäule von gegebener Oberfläche zu berechnen. Bezeichnen wir durch p, q, r die drei partiellen Resultierenden des Drucks bezüglich nach Richtung der x, y und

z; so ist 1°:

$$p = g\int dy \int dz \int_0^z dz \,.\, \varrho;$$

und die Entfernungen der Richtung der Kraft p von den Ebenen der xy und xz sind

$$\frac{g}{p}\int dy \int dz \,.\, z \int_0^z dz \,.\, \varrho \quad \text{und} \quad \frac{g}{p}\int dy \,.\, y \int dz \int_0^z dz \,.\, \varrho,$$

wobei die Grenzen der Integrale durch die Gleichung $z = \psi(y)$ gegeben sind.

2° ist

$$q = g\int dx \int dz \int_0^z dz \,.\, \varrho;$$

die Entfernungen der Richtung der Kraft q von den Ebenen der xy und yz sind

$$\frac{g}{q}\int dx \int dz \,.\, z \int_0^z dz \,.\, \varrho \quad \text{und} \quad \frac{g}{q}\int dx \,.\, x \int dz \int_0^z dz \,.\, \varrho;$$

die Grenzen der Integrale sind durch die Gleichung $z = \varphi(x)$ gegeben.

3° Endlich ist

$$r = g\int dx \int dy \int_0^{f(x,y)} dz \,.\, \varrho;$$

die Entfernungen der Richtung der Kraft r von den Ebenen der xz und yz sind

$$\frac{g}{r}\int dx \int dy \,.\, y \int_0^{f(x,y)} dz \,.\, \varrho \quad \text{und} \quad \frac{g}{r}\int dx \,.\, x \int dy \int^{f(x,y)} dz \,.\, \varrho;$$

die Grenzen der Integrale sind durch die Gleichung $y = \varpi(x)$ gegeben.

Wenn das Fluidum im Gleichgewichte ist; so ist die Dichtigkeit ϱ, falls sie nicht constant ist, nach §. 375 stets eine gegebene Function von z allein.

Wenn die Dichtigkeit constant ist, so muß man in den vorhergehenden Formeln ϱz statt des Integrals $\int_0^z dz.\varrho$ schreiben und $\varrho f(xy)$ statt des Integrals $\int_0^{f(xy)} dz.\varrho$.

Gewöhnlich lassen die drei Kräfte p, q, r sich nicht zu einer einzigen Kraft zusammensetzen; dies ist allein unter der Bedingung möglich, daß die doppelten Integrale, welche die Werthe dieser Kräfte und ihrer Momente geben, die in Beziehung auf die Axen der x, y und z genommen sind, der in §. 56 gegebenen Bedingungsgleichung Genüge leisten.

§. 378. Wenn wir nun auch den atmosphärischen Druck P berücksichtigen wollen, der auf die Oberfläche des Fluidums wirkt; so brauchen wir nur in den obigen Formeln $g\int_0^z dz.\varrho + P$ statt $g\int_0^z dz.\varrho$ zu schreiben oder zu dem Integral $\int_0^z dz.\varrho$ den Ausdruck $\frac{P}{g}$ zu addieren.

Wenn die Dichtigkeit constant ist, so müssen wir P zu $\varrho g z$ oder $\frac{P}{\varrho g}$ zu z addieren.

Es werden also die mit p, q, r bezeichneten Kräfte um Größen vermehrt, die bezüglich den Producten aus P in den Flächeninhalt der Projectionen der gegebenen Fläche auf den Ebenen der yz, xz und xy gleich sind, und die Richtungen dieser Kräfte schneiden jene Ebenen nicht mehr in denselben Punkten.

§. 379. Wenn die Fläche, gegen welche das Fluidum drückt, eine Ebene ist; so lassen die unendlich kleinen Componierenden des Drucks sich stets zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, weil sie alle parallel sind und nach derselben Seite hin wirken. Wenn wir ϱ als constant annehmen, die Axe der x in die Linie verlegen, in der die bezeichnete Ebene die freie Oberfläche des Fluidums, welche die Ebene der xy ist, schneidet, und den Neigungswinkel beider Ebenen durch θ bezeichnen; so ist die oben durch $z=f(x,y)$ dargestellte Gleichung der Fläche

$$z=y\,.\,\text{tang.}\,\theta \quad \text{oder} \quad y=\frac{z}{\text{tang.}\,\theta}.$$

Die Resultierende p aus dem der Linie x parallelen, horizontal wirkenden Drucke ist $=0$; und

$$q=\varrho\,.\,g\int dx\int dz\,.\,z;$$

die Entfernungen der Richtung von q von den Ebenen der xy und yz sind

$$\frac{\int dx\int dz\,.\,z^2}{\int dx\int dz\,.\,z} \text{ und } \frac{\int dx\,.\,x\int dz\,.\,z}{\int dx\int dz\,.\,z};$$

die Grenzen der Integrale sind durch die Gleichung $z=\varphi(x)$ gegeben. Für die Resultierende r aus dem verticalen Drucke erhalten wir nach den obigen Formeln

$$r=\text{tang.}\,\theta\,.\,\varrho g\int dx\int dy\,.\,y;$$

und die Entfernungen der Richtung der Kraft r von den Ebenen der xz und yz sind

$$\frac{\int dx\int dy\,.\,y^2}{\int dx\int dy\,.\,y} \text{ und } \frac{\int dx\,.\,x\int dy\,.\,y}{\int dx\int dy\,.\,y};$$

die Grenzen der Integrale sind durch die Gleichung $y=\varpi(x)$ gegeben, oder nach dem vorigen, $y=\frac{\varphi(x)}{\text{tang.}\,\theta}$.

Welches auch die Gestalt des Umrisses auf der ebenen Wand sein mag, dessen verticale Projection auf der Ebene der xz durch die Gleichung $z = \varphi(x)$ gegeben ist, so geben die obigen Formeln zu folgenden Bemerkungen Gelegenheit:

1) Die Entfernungen der Richtungen der Kräfte q und r von der Ebene der yz sind einander gleich. Diese Kräfte liegen demnach stets in derselben Verticalebene, die auf der gegebenen ebenen Wand senkrecht steht und lassen sich zu einer einzigen Kraft zusammensetzen.

2) Die Entfernung der Kraft r von der Ebene der xz ist der Entfernung der Kraft q von der Ebene der xy, dividiert durch $\text{tang.}\,\theta$ gleich; folglich liegt der Punkt, in welchem sich die Richtungen der beiden Kräfte schneiden, in der gegebenen ebenen Wand. Diesen Punkt, den man **Mittelpunkt des Drucks** nennt, ist zugleich der Ansatzpunkt der Resultierenden R aus dem senkrecht auf die Wand wirkenden Druck.

3) Weil $r = \frac{q}{\text{tang.}\,\theta}$, so ist

$$R = \frac{q}{\sin.\theta}.$$

Dies Resultat läßt sich sehr einfach entwickeln. Wenn A der Flächeninhalt der gegebenen Figur ist, und z_1 die Entfernung des Schwerpunkts dieser Figur von der Oberfläche des Fluidums; so ist $A \sin.\theta$ die Projection der Fläche A auf der Ebene der xz und z_1 ist gleichfalls die Entfernung des Schwerpunkts dieser Projection von der Oberfläche des Fluidums. Dann ist

$$z_1 = \frac{\int dx \int dz \,.\, z}{A \sin.\theta} = \frac{q}{\varrho g \,.\, A \sin.\theta}.$$

Der oben gegebene Ausdruck für den senkrecht auf die ebene Wand wirkenden Druck reduciert sich also auf

$$R = \varrho \,.\, g \,.\, A z_1, \quad \text{oder} \quad R = \Pi A z_1,$$

wo Π das Gewicht der Volumenseinheit des Fluidums ist. Folglich ist der auf die Ebene A wirkende Druck gleich dem Gewicht einer Säule der Flüssigkeit, deren Grundfläche A, deren Höhe z_1 die Entfernung des Schwerpunkts derselben von der Oberfläche der Flüssigkeit ist. Dies läßt sich übrigens auch ohne Rechnung schon aus dem in §. 374 gegebenen Grundgesetze schließen.

Der Ausdruck $\varrho g A z_1$ oder $\Pi A z_1$ giebt den Werth des Drucks, welche auch die Neigung der ebenen Wand sein mag. Ist dieselbe horizontal, so fällt der Mittelpunkt des Drucks mit dem Schwerpunkte der Fläche A zusammen. In den übrigen Fällen erkennt man die Lage des Mittelpunkts des Drucks, indem man die Entfernungen dieses Mittelpunkts von den beiden Ebenen der xy und der yz bestimmt; diese Entfernungen sind $\frac{\int dx \int dz . z^2}{\int dz \int z dz}$ und $\frac{\int dx . x \int dz . z}{\int dx \int dz . z}$; die Integrale müssen zwischen den durch die Gleichung $z = \varphi(x)$ gegebenen Grenzen genommen werden, da dies die Gleichung der verticalen Projection des Umrisses der Wand auf der Ebene der xz ist.

§. 380. Wenn die ebene Wand ein verticales Rechteck ist, dessen obere Seite an der Oberfläche des Fluidums liegt; so ist, wenn man die Länge dieser Seite durch a, die der verticalen Seite durch c bezeichnet,

$$R = \varrho g . a . c . \tfrac{1}{2} c \quad \text{oder} \quad R = \tfrac{1}{2} \varrho g a c^2$$

der auf dasselbe wirkende Druck und

$$\tfrac{2}{3} c$$

ist die Entfernung des Mittelpunkts des Drucks von der Oberfläche des Fluidums.

Wenn die Wand ein verticales Dreieck ist, dessen Spitze in der Oberfläche des Fluidums liegt, dessen Grundlinie a horizontal, dessen Höhe $= c$ ist; so ist der Druck

$$\varrho g \cdot \tfrac{1}{2}ac^2 \cdot \tfrac{2}{3}c \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{3}\varrho \cdot gac^3$$

und da $z = \frac{cx}{a}$, so giebt die Formel $\frac{\int dx \int dz . z^2}{\int dx \int dz . z}$ als Ausdruck für die Entfernung des Mittelpunkts des Drucks von der Oberfläche $\frac{3}{4}c$.

Liegt dagegen die Grundlinie des verticalen Dreiecks an der Oberfläche des Fluidums, so ist der Ausdruck für den Druck

$$\varrho g \cdot \tfrac{1}{2}ac^2 \cdot \tfrac{1}{3}c \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{6}\varrho \cdot gac^3$$

und da hier $z = c - \frac{cx}{a}$, so erhält man nach der obigen Formel $\frac{1}{2}c$ als Entfernung des Mittelpunkts des Drucks von der Oberfläche des Fluidums. Dieser Mittelpunkt liegt übrigens in allen Fällen auf der Linie, welche die Spitze des Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie verbindet.

§. 381. Soll neben dem vorigen auch der Luftdruck auf eine ebene Wand berücksichtigt werden, so ist der Werth des nach §. 379 gegebenen senkrechten Drucks

$$(\Pi z_1 + P)A.$$

Die Entfernungen des Mittelpunkts des Drucks von den Ebenen der xy und der yz werden ausgedrückt durch $\frac{\int dx \int dz . z(\Pi z + P)}{\int dx \int dz (\Pi z + P)}$ und $\frac{\int dx . x \int dz (\Pi z + P)}{\int dx \int dz (\Pi z + P)}$. Die Integrale müssen immer zwischen den Grenzen genommen werden, die durch $z = \varphi(x)$, die Gleichung der Projection des Umfanges der Wand auf einer Verticalebene, welche der Linie parallel ist, in der diese Wand die Oberfläche des Fluidums schneidet, gegeben sind.

XXVI. Gleichgewicht der auf der Oberfläche schwerer Fluida schwimmenden Körper.

§. 382. In eine schwere tropfbare Flüssigkeit, die im Gleichgewichte ist, weshalb ihre Oberfläche nach §. 374 eine Horizontalebene sein muß, werde ein schwerer voller Körper von beliebiger Gestalt eingetaucht. Es fragt sich dann, unter welchen Bedingungen dieser Körper sich im Gleichgewichte befindet, d. h. die Einwirkung der Schwerkraft auf den Körper und der auf alle Theile seiner Oberfläche von der Flüssigkeit ausgeübte Druck sich gegenseitig aufheben.

Die Einwirkung der Schwerkraft auf den Körper reduciert sich stets auf eine einzige Kraft, die dem Gewichte des Körpers gleich nach Richtung der durch seinen Schwerpunkt hindurchgehenden Verticale wirkt. Der auf die verschiedenen Theile der Oberfläche des Körpers geübte Druck hat nach §. 376 für seine horizontalen Componierenden stets eine Resultierende, die gleich 0 ist; denn auf jeder beliebigen Verticalebene, auf welcher man diese Oberfläche projiciieren kann, werden immer die Projectionen der Oberfläche nach beiden Seiten hin congruent sein und diese Projectionen entsprechen dem nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Drucke. Die verticalen Componierenden des Drucks der Flüssigkeit haben zur Resultierenden eine einzige Kraft, die von unten nach oben wirkt, dem Gewichte des durch den Körper verdrängten Fluidums gleich ist und nach Richtung der durch den Schwerpunkt des Fluidums hindurchgehenden Verticale wirkt. Denn zwei Elemente der Oberfläche des Körpers, die in derselben Verticallinie liegen, unterliegen stets der Einwirkung zweier Kräfte, von denen die eine von unten nach oben, die andre von oben nach unten wirkt; die Resultierende derselben, die nach der

entgegengesetzten Richtung, als die Schwerkraft, wirkt, ist dem Gewichte der zwischen den beiden Elementen liegenden Flüssigkeitsmasse gleich.

Hiernach müssen wir folgende Bedingungen des Gleichgewichts aufstellen: 1) das Gewicht des Körpers muß dem Gewichte des Volumens der verdrängten Flüssigkeit gleich sein; 2) müssen der Schwerpunkt dieses Volumens und der des Körpers in derselben Verticallinie liegen.

Wenn der Körper und die Flüssigkeit gleichartig sind, so fällt der Schwerpunkt des Körpers mit dem der verdrängten Flüssigkeit stets zusammen; zum Gleichgewichte wird hier also erfordert, daß das Gewicht des Körpers und das der verdrängten Flüssigkeit einander gleich sind.

§. 383. Wenn das Gewicht des Körpers jedoch größer oder kleiner ist, als das des verdrängten Fluidums; so zwingt ihn eine Verticalkraft, die dem Unterschiede beider Gewichte gleich ist, zu sinken oder zu steigen. Dabei nimmt der Körper eine solche Lage an, daß die beiden Schwerpunkte in derselben Verticallinie liegen, die zugleich mit der Richtung jener Kraft zusammenfällt, und daß der Schwerpunkt des Körpers unter oder über dem Schwerpunkte des verdrängten Fluidums liegt.

§. 384. Wenn ein voller Körper zum Theil in eine tropfbare Flüssigkeit eingetaucht wird; so heben sich ebenso, wie in dem ersten Falle, die horizontalen Componierenden des auf die Oberfläche des untergetauchten Theiles wirkenden Drucks der Flüssigkeit immer gegenseitig auf und die verticalen Componierenden dieses Drucks unterscheiden sich nicht von der Einwirkung der Schwerkraft auf das von jenem Theile des Körpers verdrängte Fluidum. Gleichgewicht eines schweren vollen Körpers, welcher auf der Oberfläche eines schweren Fluidums schwimmt, findet also dann statt, wenn 1) das Gewicht des Körpers dem Gewichte des

verdrängten Theiles der Flüssigkeit gleich ist und 2) der Schwerpunkt des Körpers und der des Fluidums, dessen Platz er einnimmt, in derselben Verticallinie liegen.

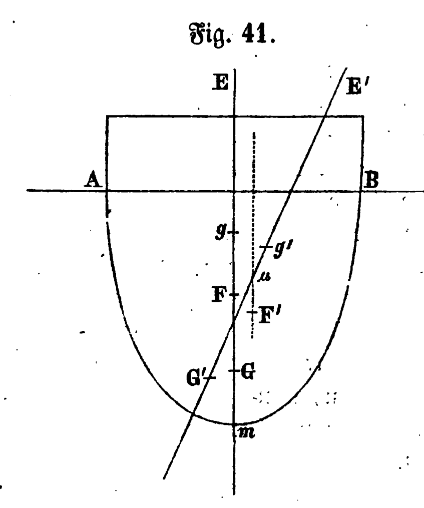
Wenn Körper und Flüssigkeit gleichförmig sind, so fällt der Schwerpunkt des eingetauchten Theils des Körpers mit dem des von demselben verdrängten Fluidums zusammen. Im Gleichgewichtszustande muß die Oberfläche der Flüssigkeit den Körper in zwei Theile so theilen, daß ihre Volumina sich verhalten, wie die Dichtigkeit des Körpers sich zu dem Ueberschuß der Dichtigkeit des Fluidums über die des Körpers verhält und daß die Schwerpunkte derselben in derselben Verticallinie liegen.

Stetigkeit des Gleichgewichts schwimmender Körper.

§. 385. Unter welchen Bedingungen ein auf der Oberfläche eines Fluidums schwimmender Körper im Gleichgewichte ist, haben wir im vorigen §. gesehen. Das Gleichgewicht ist stetig, wenn der Körper irgendwie ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage herausgerückt und darauf der Einwirkung der auf ihn wirkenden Kräfte überlassen, durch diese Kräfte stets in jene Gleichgewichtslage zurückgeführt wird.

In Fig. 41 sei AB die Oberfläche des Fluidums, AmB der schwimmende Körper in seiner natürlichen Gleichgewichtslage, F der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit und G der Schwerpunkt des Körpers. Nach dem vorigen §. liegen diese beiden Punkte in derselben Verticallinie EG: der Körper ist eben darum im Gleichgewichte, weil eine dem Gewichte des Körpers gleiche Kraft von oben nach unten auf den Punkt G, eine gleiche Kraft von unten nach oben auf den Punkt F wirkt, die sich das Gleichgewicht halten müssen.

Fig. 41.



Aendert man die ursprüngliche Lage des schwimmenden Körpers so, daß der Schwerpunkt von G nach G', überhaupt die Linie EG nach $E'G'$ verlegt wird; so ändert sich auch die Lage des Schwerpunkts der verdrängten Flüssigkeit F, der dann nach F' fallen möge. Es wirken dann zwei Verticalkräfte auf den schwimmenden Körper, die eine, die stets dem Gewichte des Körpers gleich ist, von oben nach unten auf G'; die andere, die dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich ist, von unten nach oben auf F'. In Folge dieser Verschiebung strebt immer 1) der Schwerpunkt des Körpers vertical nach unten oder nach oben sich zu bewegen, je nachdem derselbe in Folge der Verschiebung über seine natürliche Gleichgewichtslage emporgehoben oder unter dieselbe herabgedrückt ist; 2) strebt der schwimmende Körper sich um eine Horizontalaxe zu drehen, die durch den Punkt G' hindurchgeht und senkrecht auf der Verticalebene steht, die durch die beiden Punkte G' und F' hindurchgelegt ist. Denken wir uns eine Ebene durch diese horizontale Axe und die Linie $E'G'$ hindurchgelegt, die hier senkrecht auf der Ebene der Figur stehen möge; so strebt offenbar, wenn bei einer Neigung der Linie $E'F'$ nach der rechten Seite, wie sie die Figur zeigt, der Punkt F' rechts von G' liegt, die Kraft, die dem Gewichte des verdrängten

Fluidums gleich ist und auf F' von unten nach oben wirkt, die Linie $E'G'$ in die Verticallinie zurückzubringen; während dieselbe Kraft streben würde die Linie $E'G'$ mehr und mehr nach der rechten Seite hin abzulenken, sobald unter denselben Verhältnissen der Punkt F' links von G' liegt. Dies läßt sich auch so darstellen: legt man durch F' eine Verticallinie, welche die auf der Ebene der Figur senkrecht stehende oben erwähnte Ebene, deren Durchschnitt $E'G'$ ist, in μ schneidet; so fällt der Körper in seine vorige Lage zurück, wenn μ oberhalb des Punktes G' liegt; andererseits fährt der Körper fort mehr und mehr sich nach derselben Seite hinüberzuneigen, wenn μ unter G auf der Linie $E'G'$ liegt. Nach Bouguer hat man den Punkt μ Metacentrum genannt.

Der letztere der oben angegebenen Fälle tritt ein, wenn der Schwerpunkt des Körpers anfänglich in g liegt, in Folge der Verschiebung aber nach g' verlegt wird; dann liegt das Metacentrum μ unterhalb des Punkts g' und der schwimmende Körper fährt fort sich nach derselben Seite zu neigen. So hängt es unter sonst gleichen Umständen allein von der Lage des Schwerpunkts des schwimmenden Körpers ab, ob derselbe in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückfällt oder sich mehr und mehr von derselben entfernt. Wird deswegen auch nur die Lage des Schwerpunkts allein verändert, so verändert sich dadurch auch die Stetigkeit des Gleichgewichts in dem schwimmenden Körper.

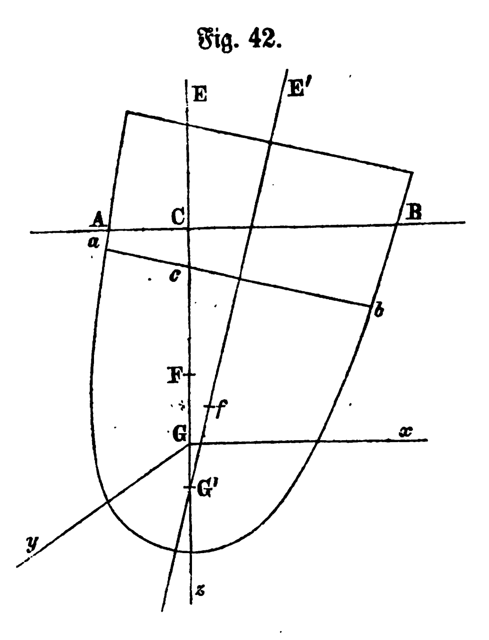
Wenn man also einen schwimmenden Körper aus seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt und dann der Einwirkung der auf ihn wirkenden Kräfte überlassen hat; so fällt derselbe augenscheinlich stets in jene Gleichgewichtslage zurück, wenn sein Metacentrum bei allen Lagen, die dem Körper ertheilt werden können, über dem Schwerpunkte

bleibt: in diesem Falle ist sein Gleichgewicht stetig. Liegt dagegen in allen Lagen, die man dem schwimmenden Körper ertheilen kann, das Metacentrum unter dem Schwerpunkte; so streben die Kräfte mehr und mehr den Körper aus jener Gleichgewichtslage zn entfernen, das Gleichgewicht ist also nicht stetig. Da sich das Metacentrum aber bald über, bald unter dem Schwerpunkte befinden kann, je nachdem die jedesmalige Lage des Körpers es festlegt; so lassen sich gewöhnlich die Bedingungen der Stetigkeit des Gleichgewichts nicht genau angeben, ohne daß man die Beschaffenheit der Bewegungen des Körpers berücksichtigt.

§. 386. Unter der Annahme, daß die Verschiebung des Körpers sehr klein ist, lassen sich die Bedingungen für die Beständigkeit oder Unbeständigkeit des Gleichgewichts in Beziehung auf die Gestalt des Körpers oder die Vertheilung der ihn belastenden Gewichte allgemein ausdrücken. Wir nehmen hier auf die Bewegung des Fluidums keine Rücksicht und nehmem an, daß dasselbe beständig auf den Körper dieselbe Einwirkung ausübt, als wenn der Körper in Ruhe bliebe. In Cap. XX ist bewiesen, daß man stets besonders betrachten kann 1) die Bewegung des Schwerpunkts des Körpers, die so beschaffen ist, als wenn die ganze Masse des Körpers in ihm concentriert wäre und auf ihn alle Kräfte wirkten; 2) die Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt, welche ebenso stattfindet, als wenn derselbe fest wäre.

Wie in Fig. 41, sei auch in Fig. 42 AB die Oberfläche des Fluidums, G die Lage des Schwerpunkts des Körpers in seiner natürlichen Gleichgewichtslage, EG die Verticale, die durch diesen Punkt hindurchgeht, F der in dieser Verticallinie liegende Schwerpunkt des durch den Körper verdrängten Fluidums. Den Punkt G nehmen wir zum Anfangspunkte der Coordinaten, so daß x und y

Fig. 42.



die horizontalen, z die verticale ist, die von oben nach unten gezählt wird. Wir wollen nun annehmen, der Schwerpunkt G sei nach G' hinabgedrückt ohne aus der Verticallinie herauszutreten, in welcher er liegt, die Linie EG sei nach $E'G'$ verlegt und der Punkt F nach f in dieser selben Linie verschoben, wo die Entfernung fG' der Entfernung FG gleich ist. Die Ebene, in der die Oberfläche des Fluidums in der ursprünglichen Gleichgewichtslage den Körper schneidet, AB, ist niedergedrückt und geneigt, in dem sie senkrecht gegen $E'G'$ bleibt: dieselbe schneidet die Ebene der xz in der ab genannten Linie: die Entfernung Cc ist GG' gleich, wenn man eine sehr kleine Größe der zweiten Ordnung vernachlässigt. Endlich wollen wir bezeichnen durch

- Υ das Volumen des durch den Körper in seiner natürlichen Gleichgewichtslage verdrängten Fluidums;
- Ω die Flächengröße der Ebene des Tiefgangs, AB;
- a, b die Coordinaten des Schwerpunkts der Fläche Ω vom Punkte G aus auf den Axen der x und y gezählt;
- c die Entfernung GF oder $G'f$ der Schwerpunkt des Körpers und des im natürlichen Gleichgewichtszustande des schwimmenden Körpers verdrängten Fluidums; (in der Figur liegt G unter F; liegt es oberhalb desselben, so muß man in den Formeln das Vorzeichen von c ändern);
- ζ die verticale sehr kleine Linie GG' oder Cc, um welche der Schwerpunkt G unter die Lage herabgedrückt ist, die er in seiner natürlichen Gleichgewichtslage einnimmt.
- φ, ω, ψ die sehr kleinen Winkel, welche die Linie EG um die Axen der x, y und z beschrieben hat um in die in der Zeichnung dargestellte Lage zu gelangen. (Man nimmt hier die Winkel φ und ω positiv an, wenn die Rotationsbewegungen um die Axen der x und der y beide die Wirkung haben, daß die in dem Winkel der positiven x und y liegenden Punkte der Ebene des Tiefgangs des Körpers niedergedrückt werden;
- ϱ die Masse der Volumenseinheit des Fluidums;
- g die Geschwindigkeit, welche die Schwerkraft in der Zeiteinheit den schweren Körpern ertheilt.

Wenn angenommen wird, daß die Verschiebung des Körpers sehr klein ist; so darf man die Größen Ω, a und b während der ganzen Dauer der Bewegung als constant ansehen.

Augenscheinlich wirken folgende Kräfte auf den schwimmenden Körper in der durch die Zeichnung gegebenen Lage: 1) das Gewicht dieses Körpers, wofür der Ausdruck $\varrho g \Upsilon$ ist, wirkt vertical von oben nach unten auf den Punkt G'; 2) eine Kraft, gleich dem Gewicht des in der natürlichen Gleichgewichtslage verdrängten Fluidums, wofür der Ausdruck gleichfalls $\varrho g \Upsilon$ ist, wirkt vertical von unten nach oben auf den Punkt f; 3) das Gewicht des zwischen den beiden Ebenen AB und ab enthaltenen Fluidums, welches man gleichfalls als von unten nach oben wirkend ansehen muß. Der horizontale Druck auf die Oberfläche des Körpers nach allen Richtungen hin hebt sich selbst auf und braucht deshalb nicht in Betracht gezogen zu werden. Um die Gleichungen der Bewegung des Körpers aufzustellen, müssen wir die bezeichneten Kräfte als Functionen der Größen ζ, φ, ω, ψ darstellen, so daß ihre Momente in Beziehung auf die Coordinatenaxen genommen werden.

Die Momente der Kraft $\varrho g \Upsilon$, die auf f vertical von unten nach oben wirkt, in Beziehung auf die Drehung des Körpers um zwei den Axen der x und y parallele Axen, die durch den Schwerpunkt G' hindurchgehen, sind offenbar

$$\varrho g \Upsilon . c\varphi \text{ und } \varrho g \Upsilon . c\omega.$$

Das Gewicht des zwischen den beiden Ebenen AB und ab enthaltenen Fluidums berechnen wir so: wenn wir auf der Ebene AB einen Punkt annehmen, dessen horizontale Coordinaten x und y sind; so ist die Länge der von diesem Punkte bis zur Ebene ab gezogenen Verticallinie $\zeta + x\omega + y\varphi$: Folglich ist das Gewicht dieses Fluidums

$$\varrho g \int\int dx dy (\zeta + x\omega + y\varphi)$$

und die Momente dieser Kraft, in Beziehung auf die Axen der x und y genommen sind bezüglich

$$\varrho g \int\int dx dy , y(\zeta + x\omega + y\varphi) \text{ und}$$
$$\varrho g \int\int dx dy . x(\zeta + x\omega + y\varphi).$$

Die Integrale müssen für die ganze Ausdehnung der Tiefgangebene AB genommen werden. Wenn man beachtet, daß $\int\int dx dy = \Omega$, $\int\int dx dy . y = \Omega b$, $\int\int dx dy . x = \Omega a$ ist, und zur Abkürzung setzt

$$\int\int dx dy . xy = l, \quad \int\int dx dy . y^2 = m, \quad \int\int dx dy . x^2 = n;$$

so erhält man für das Gewicht des zwischen AB und ab enthaltenen Fluidums den Ausdruck

$$\varrho g \Omega(\zeta + a\omega + b\varphi)$$

und folgende Ausdrücke für die Momente dieses Gewichts, die in Beziehung auf, den x und y parallele und durch den Schwerpunkt hindurchgehende, Axen genommen sind

$$\varrho g(\Omega b\zeta + l\omega + m\varphi) \text{ und}$$
$$\varrho g(\Omega a\zeta + n\omega + l\varphi).$$

Die Größen l, m und n darf man während der ganzen Dauer der Bewegung als constant ansehen.

Es folgt aus dem Vorhergehenden, daß 1) wenn man alle Kräfte auf den Schwerpunkt G' überträgt, eine einzige von unten nach oben vertical wirkende Kraft übrig bleibt, gleich

$$\varrho g \Omega(\zeta + a\omega + b\varphi);$$

2) daß die Momente der Kräfte, welche streben das System um die den Axen der x und y parallelen Axen so zu drehen, daß sie die Winkel φ und ω verkleinern, bezüglich sind

$$\varrho g[\Omega b\zeta + l\omega + (\Upsilon c + m)\varphi] \text{ und}$$
$$\varrho g[\Omega a\zeta + (\Upsilon c + n)\omega + l\varphi].$$

Das Moment der Kräfte, welche das System um die Axe der z zu drehen suchen, hat den Werth 0, weil die horizontalen Kräfte sich nach allen Richtungen einander aufheben.

§. 387. Wenn also der schwimmende Körper in Bewegung ist und die Werthe der Grössen ζ, φ, ω, ψ als so gross angenommen werden, als sie es am Ende der Zeit t sind; so wird nach §. 312 die Bewegung des Schwerpunkts bestimmt durch die eine Gleichung

$$\Upsilon \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -g\Omega(\zeta + a\omega + b\varphi);$$

die Rotationsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt ist nach demselben §. durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \varrho g[\Omega b\zeta + l\omega + (\Upsilon c + m)\varphi];$$

$$S.m\left(x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\varrho g[\Omega a\zeta + (\Upsilon c + n)\omega + l\varphi];$$

$$S.m\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0.$$

Nach den Formeln in §. 249, in denen man die Vorzeichen von z und von ω ändern muss, ist

$$dx = yd\psi - zd\omega, \quad \text{und folglich} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = y\frac{d^2\psi}{dt^2} - z\frac{d^2\omega}{dt^2};$$

$$dy = -zd\varphi - xd\psi, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -z\frac{d^2\varphi}{dt^2} - x\frac{d^2\psi}{dt^2};$$

$$dz = xd\omega + yd\varphi, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = x\frac{d^2\omega}{dt^2} + y\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

denn, wenn die Verschiebungen als sehr klein angenommen werden, darf man die Coordinaten jedes Punkts des Körpers in Beziehung auf die Zeit als constant ansehen. Wenn man diese Ausdrücke in die drei Gleichungen der Rotationsbewegung substituiert und wie in §. 285 setzt

$$A = S.m(y^2 + z^2), \quad F = S.myz,$$

$$B = S.m(x^2 + z^2), \quad G = S.mxz,$$

$$C = S.m(x^2 + y^2), \quad H = S.mxy;$$

so erhält man

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2}+G\frac{d^2\psi}{dt^2}+H\frac{d^2\omega}{dt^2}=-\varrho g[\Omega b\zeta+l\omega+(\Upsilon c+m)\varphi],$$

$$B\frac{d^2\omega}{dt^2}+G\frac{d^2\varphi}{dt^2}-F\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\varrho g[\Omega a\zeta+(\Upsilon c+n)\omega+l\varphi],$$

$$C\frac{d^2\psi}{dt^2}-F\frac{d^2\omega}{dt^2}+G\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich die Ausdrücke für die Größen ζ, ω, φ und ψ als Functionen von t. Da dieselben lineär sind und constante Coefficienten besitzen; so kann man sie immer nach dem in II. §. 455 u. ff. des Lehrb. der Diff. Rechn. angegebenen Verfahren integrieren.

§. 388. Der gewöhnlichen Construction der Seeschiffe gemäß wollen wir annehmen, daß der schwimmende Körper durch eine Verticalebene in zwei gleiche und symmetrische Theile zerlegt werden kann.

Wenn diese Ebene die der yz ist, so ist darnach $a=0$, $l=0$, $G=0$, $H=0$; dadurch reducieren sich die vier obigen Gleichungen auf

$$\Upsilon\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-g\Omega(\zeta+b\varphi), \tag{1}$$

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\varrho g[\Omega b\zeta+(\Upsilon c+m)\varphi], \tag{2}$$

$$B\frac{d^2\omega}{dt^2}-F\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\varrho g(\Upsilon c+n)\omega, \tag{3}$$

$$C\frac{d^2\psi}{dt^2}-F\frac{d^2\omega}{dt^2}=0. \tag{4}$$

Die Gleichungen (1) und (2) nehmen, wenn man um abzukürzen setzt

$$S=\frac{g\Omega}{\Upsilon},\quad T=\frac{g\Omega b}{\Upsilon},\quad S'=\frac{\varrho g\Omega b}{A},\quad T'=\frac{\varrho g(\Upsilon c+m)}{A},$$

folgende Form an:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S.\zeta + T\varphi = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + S'.\zeta + T'\varphi = 0.$$

Multipliciert man die zweite mit einer unbestimmten Constanten λ und addiert sie zur ersten, so erhält man

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \lambda\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (S + \lambda S')\zeta + (T + \lambda T')\varphi = 0.$$

Führt man dann eine neue Veränderliche u, ein, so daß $\zeta = u - \lambda\varphi$ oder

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - \lambda\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

so ist

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (S + \lambda S')u - (S + \lambda S')\lambda\varphi + (T + \lambda T')\varphi = 0.$$

Man leistet dieser Gleichung Genüge, wenn man setzt

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (S + \lambda S')u = 0 \quad \text{und}$$

$$(S + \lambda S')\lambda - (T + \lambda T') = 0.$$

Nach dieser zweiten Gleichung ist

$$\lambda = \frac{-S + T' \pm \sqrt{(S - T')^2 + 4TS'}}{2S'};$$

wenn man in die erste diesen Werth hineinsetzt und zur Abkürzung setzt

$$K = \tfrac{1}{2}[S + T' \pm \sqrt{(S - T')^2 + 4TS'}];$$

so erhält man

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Ku = 0;$$

das Integral dieser Gleichung ist

$$u = \Gamma\cos.t\sqrt{K} + \Delta\sin.t\sqrt{K},$$

wo Γ und Δ zwei willkührliche Constanten sind.

Wenn man annimmt, daß im Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit des schwimmenden Körpers $=0$ ist; so ist auch $\frac{d\zeta}{dt}=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$ und folglich auch $\frac{du}{dt}=0$, so daß dann auch die Constante $\Delta=0$ sein muß. Wir setzen also

$$u=\Gamma_1 \cos. t\sqrt{K_1} \quad \text{und} \quad u=\Gamma_2 \cos. t\sqrt{K_2},$$

wo wir durch K_1 und K_2 zwei Werthe von K bezeichnen; bezeichnen wir nun die entsprechenden Werthe von λ durch λ_1 und λ_2, so ist

$$\zeta+\lambda_1\varphi=\Gamma_1 \cos. t\sqrt{K_1} \quad \text{und}$$

$$\zeta+\lambda_2\varphi=\Gamma_2 \cos. t\sqrt{K_2};$$

hieraus folgt ferner

$$\zeta=\frac{\Gamma_1\lambda_2 \cos. t\sqrt{K_1}-\Gamma_2\lambda_1 \cos. t\sqrt{K_2}}{\lambda_2-\lambda_1} \tag{5}$$

$$\varphi=\frac{\Gamma_1 \cos. t\sqrt{K_1}-\Gamma_2 \cos. t\sqrt{K_2}}{\lambda_1-\lambda_2}. \tag{6}$$

Bezeichnet man außerdem die Anfangswerthe von ζ und φ durch ζ_0 und φ_0, so sind offenbar

$$\zeta_0+\lambda_1\varphi_0=\Gamma_1 \quad \text{und} \quad \zeta_0+\lambda_2\varphi_0=\Gamma_2$$

die Werthe der beiden Constanten Γ_1 und Γ_2.

Nach Gleichung (4) reduciert sich die Gleichung (3) auf

$$\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{\varrho g(\Upsilon c+n)C}{BC-F^2}.\omega=0$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\omega=\omega_0 \cos. t\sqrt{\frac{\varrho g(\Upsilon c+n)C}{BC-F^2}}, \tag{7}$$

wenn man gleichfalls den Anfangswerth von $\frac{d\omega}{dt}=0$ setzt und den Anfangswerth von ω durch ω_0 bezeichnet.

Setzt man diesen Werth von ω in Gleichung (4), so giebt sie

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{F}{C}\omega_0 \frac{\varrho g(\Upsilon c + n)C}{BC - F^2} \cos. t\sqrt{\frac{\varrho g(\Upsilon c + n)C}{BC - F^2}}.$$

Wenn man zwei mal hinter einander integriert, den Anfangswerth von $\frac{d\psi}{dt} = 0$ setzt und durch ψ_0 den Anfangswerth von ψ bezeichnet, so erhält man

$$\psi = \psi_0 + \frac{F}{C}\omega_0\left(1 - \cos. t\sqrt{\frac{\varrho g(\Upsilon c + n)C}{BC - F^2}}\right). \quad (8)$$

Die Gleichungen (5), (6), (7) und (8) geben die Werthe der vier Veränderlichen ζ, φ, ω und ψ als Functionen der Zeit t und bestimmen dadurch die Bewegung des schwimmenden Körpers. Wenn die Wurzelgrößen, mit denen das hinter dem Cosinuszeichen stehende t multipliciert wird, reell oder die Größen unter dem Wurzelzeichen positiv sind; so bestehen jene Bewegungen offenbar nur darin, daß der Körper aus seiner natürlichen Gleichgewichtslage von einer Seite zur andern Schwankungen macht. Der Körper entfernt sich nie weiter von dieser Gleichgewichtslage, als er im Anfange der Bewegung von derselben entfernt war und das Gleichgewicht ist stetig.

Wenn aber die Größen unter dem Wurzelzeichen negativ sind, so strebt der Körper mehr und mehr sich aus seiner Anfangslage zu entfernen. Es hängt also von den Vorzeichen der Größen K_1, K_2 und $\frac{\Upsilon c + n}{BC - F^2}$ ab, ob das Gleichgewicht beständig oder unbeständig ist. Der eine der Werthe K ist immer positiv und der andere ist augenscheinlich gleichfalls positiv, wenn $\Upsilon c + m > \Omega b^2$. So läßt sich die Bedingung der Stetigkeit des Gleichgewichts dadurch ausdrücken, daß man setzt

$$\Upsilon c + m > \Omega b^2 \text{ und } \frac{\Upsilon c + n}{BC - F^2} > 0.$$

Die Gestalt der Seeschiffe ist symmetrisch in Beziehung auf die Ebene, welche sie der Länge nach durchschneidet; man darf sie aber ohne großen Fehler auch in Beziehung auf die auf jener senkrecht stehende Ebene als symmetrisch ansehen. Weil man also ohne großen Irrthum annehmen darf, wenn man die obigen Formeln auf die Bewegung der Seeschiffe anwendet, daß die Ebene der xz den schwimmenden Körper in zwei beinah gleiche Theile zerlegt; so darf man b und F als solche Größen ansehen, deren Quadrate man vernachlässigen kann. So hängt also das Vorzeichen des einen der Werthe von K, die in den Gleichungen (5) und (6) unter dem Wurzelzeichen stehen, ganz und gar von dem Vorzeichen der Größe $\Upsilon c + m$ ab: beide Werthe von K sind positiv, wenn $\Upsilon c + m$ positiv ist und der eine derselben ist negativ im entgegengesetzten Falle. Ebenso ist in den Gleichungen (7) und (8) die Wurzelgröße reell oder imaginär, je nachdem die Größe $\Upsilon c + n$ positiv oder negativ ist. Demnach ist das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers beständig, wenn die Größen $\Upsilon c + m$ und $\Upsilon c + n$ beide positiv sind, und unbeständig, wenn eine derselben oder beide negativ sind.

Die Größen m und n sind immer positiv, wie auch Υ. Die Größe c ist positiv, wenn der Schwerpunkt des Körpers in der natürlichen Gleichgewichtslage unterhalb des Schwerpunkts des verdrängten Fluidums liegt, wie in der Figur angenommen ist: in diesem Falle sind also die Größen $\Upsilon c + m$ und $\Upsilon c + n$ stets positiv und folglich ist das Gleichgewicht immer beständig. Wenn aber der Schwerpunkt des Körpers oberhalb des Schwerpunkts der im natürlichen Gleichgewichtszustande verdrängten Flüssigkeit liegt, so ist das Gleichgewicht auch dann noch stetig, wenn Υc kleiner als m und n ist.

§. 389. Man vereinfacht den Gang der Untersuchung sehr, wenn man gleich von vorn herein annimmt, daß sowohl die Ebene der xz als die der yz den Körper in zwei gleiche und symmetrische Theile zerlegt. Setzt man in den Gleichungen (1), (2), (3), (4) des vorigen §. $b=0$ und $F=0$; so reducieren sie sich auf

$$\Upsilon \frac{d^2 z}{dt^2} = -g\Omega\zeta,$$

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varrho g(\Upsilon c + m)\varphi,$$

$$B\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\varrho g(\Upsilon c + n)\omega,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0.$$

Da in diesen Gleichungen (welche man auch direct hätte entwickeln können) die Veränderlichen getrennt sind; so kann man unmittelbar integrieren und erhält, wenn man wieder die anfänglichen Geschwindigkeiten $=0$ setzt,

$$\zeta = \zeta_0 \cos. t\sqrt{\frac{g\Omega}{\Upsilon}},$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos. t\sqrt{\frac{\varrho g(\Upsilon c + m)}{A}},$$

$$\omega = \omega_0 \cos. t\sqrt{\frac{\varrho g(\Upsilon c + n)}{B}},$$

$$\psi = \psi_0.$$

Man kann nun mit vollständiger Genauigkeit versichern, daß das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers beständig oder unbeständig ist, je nachdem die beiden Größen $\Upsilon c + m$ und $\Upsilon c + n$ beide positiv sind oder nicht. Diese Größen mit dem Gewicht der Volumenseinheit des Fluidums ϱg multipliciert sind bezüglich die Momente der Kräfte, welche die Axe des schwimmenden Körpers in ihre ursprüngliche verticale Lage zurückzuführen streben, wenn der Körper

so weit aus dieser Anfangslage verschoben ist, wie die Größen ξ, m und n bestimmen. Es läßt sich daraus schließen, daß die Größen $\Upsilon c + m$ und $\Upsilon c + n$ positiv oder negativ sind, jenachdem das nach den jedesmaligen Umständen bestimmte Metacentrum oberhalb oder unterhalb des Schwerpunkts des schwimmenden Körpers liegt; es genügt demnach in dem uns vorliegenden besondern Falle das so bestimmte Metacentrum zu untersuchen, um aussprechen zu können, ob das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers beständig ist oder nicht.

Die Schwingungen, welche der schwimmende Körper vertical und um die beiden in seinem Schwerpunkte sich schneidenden Hauptaxen macht, sind hier von einander völlig unabhängig. Es folgt aus den vorangehenden Formeln, daß die Dauer der Schwingungen bezüglich ausgedrückt wird durch

$$\pi\sqrt{\frac{\Upsilon}{g\Omega}}, \quad \pi\sqrt{\frac{A}{\varrho g(\Upsilon c+m)}}, \quad \pi\sqrt{\frac{B}{\varrho g(\Upsilon c+n)}};$$

π ist das Verhältniß des Kreisumfangs zum Durchmesser. Man kann in voraus darüber, ob die Bewegung verschiedener Seeschiffe mehr oder weniger sanft ist, urtheilen, wenn man bei denselben diese Werthe vergleicht.

§. 390. Um eine sehr einfache Anwendung der obigen Resultate zu geben, wollen wir annehmen, der schwimmende Körper sei ein gleichförmiges rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Dichtigkeit halb so groß ist, als die des Fluidums; wir wollen nur die Gleichgewichtslagen ins Auge fassen, in denen die eine der Kanten vertical, die beiden andern horizontal sind und die Tiefgangsebene durch den Mittelpunkt des Körpers hindurchgeht. Es ist unsere Aufgabe nun zu bestimmen, in welchen Fällen das Gleichgewicht beständig sein wird. Unter Beibehaltnng der oben

gewählten Bezeichnungen nennen wir die halben Längen der drei den Axen der x, der y und der z in der natürlichen Gleichgewichtslage parallel liegenden Kanten a, b und c. Das Volumen der verdrängten Flüssigkeit ist in diesem Zustande gleich dem halben Volumen des Körpers, also

$$\Upsilon = 4abc.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt in der Oberfläche des Fluidums und der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt in der Entfernung $\frac{1}{2}c$ unter dieser Oberfläche: die Größe c in den obigen Formeln muß deshalb durch $-\frac{1}{2}c$ ersetzt werden.

Außerdem ist

$$m = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy.y^2 = \tfrac{4}{3}ab^3,$$

$$n = \int_{-a}^{a} dx.x^2 \int_{-b}^{b} dy = \tfrac{4}{3}a^3b.$$

Demnach ist

$$\Upsilon c + m = 4ab\left(-\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{3}\right),$$

$$\Upsilon c + n = 4ab\left(-\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{3}\right);$$

folglich ist das Gleichgewicht nur dann stetig, wenn die vertikale Kante wenigstens $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mal kleiner ist, als die kleinere der horizontalen Kanten. Es giebt nur eine einzige Lage, in der das Gleichgewicht beständig ist.

Nach §. 296 sind die Trägheitsmomente des Körpers, welche in Beziehung auf die im Schwerpunkte sich schneidenden Axen der x und y genommen sind, bezüglich

$$A = \tfrac{4}{3}\varrho abc(b^2 + c^2), \quad B = \tfrac{4}{3}\varrho abc(a^2 + c^2),$$

wo ϱ gleichfalls die Dichtigkeit des Fluidums bezeichnet, die hier doppelt so groß, als die des schwimmenden Körpers ist. Ferner ist

$$\Omega = 4ab.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die oben gegebenen Formeln erhält man folgende Ausdrücke für die Dauer der sehr kleinen Schwingungen, welche der Körper nach verticaler Richtung, um die horizontale, der Kante $2a$ parallele Axe und um die horizontale, der Kante $2b$ parallele Axe macht:

$$\pi\sqrt{\frac{c}{g}},\quad \pi\sqrt{\frac{c}{g}\cdot\frac{b^2+c^2}{b^2-\frac{3}{2}c^2}},\quad \pi\sqrt{\frac{c}{g}\cdot\frac{a^2+c^2}{a^2-\frac{3}{2}c^2}}.$$

Man sieht, daß die Dauer der verticalen Schwingungen der Dauer der Schwingungen eines einfachen Pendels von der Länge c gleich ist.

XXVII. Gleichgewicht einer atmosphärischen Säule. Barometrische Höhenmessungen.

§. 391. Wenn ein gleichförmiges Fluidum in einem Gefäße enthalten ist und der Einwirkung der Schwerkraft unterliegt, die man wie eine constante Verticalkraft ansieht, wenn ferner die Temperatur in der ganzen Ausdehnung des Fluidums gleichförmig ist; so darf man, wie §. 369, den Druck p, der in irgend einem Punkte wirkt, dem Mariotte'schen Gesetze gemäß ausdrücken durch

$$p = k\varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Fluidums in diesem Punkte, k einen constanten Coefficienten bezeichnet. Das in dem citierten §. gegebene Resultat giebt das Gesetz des Gleichgewichts des Fluidums; wenn wir also die verticale Ordinate eines beliebigen Punkts, welche von einer festen horizontalen Ebene aus von unten nach oben gezählt wird, z nennen, so ist hier

$$\Pi = -gz, \text{ folglich } p = A.e^{-\frac{gz}{k}} \text{ oder } z = \frac{k}{g}\log.\frac{A}{p};$$

A ist eine willkührliche Constante; wenn man den Druck, welcher in dem Punkte wirkt, dessen verticale Ordinate Z ist, durch P bezeichnet; so ist

$$p = A \, . \, e^{\frac{g}{k}(Z-z)} \quad \text{oder} \quad z - Z = \frac{k}{g} \log . \frac{P}{p} .$$

Weil aus dieser Gleichung folgt, daß $z = \infty$, sobald $P = 0$ ist; so darf man nicht annehmen, daß auf die Oberfläche des Fluidums kein Druck wirkt, wofern nicht zugleich die Höhe der Luftsäule als unendlich groß angenommen wird. Da jedoch zugleich mit dem Drucke auch die Dichtigkeit $= 0$ wird; so darf man aus diesem Resultate allein das schließen, daß man die Höhe, in der das Fluidum aufhört, nicht bestimmen kann.

§. 392. Wenn mehrere Gase oder Dämpfe der Einwirkung der Schwerkraft unterliegen und bei constanter Temperatur in demselben Gefäße enthalten sind; so weiß man aus physikalischen Versuchen 1) daß diese Fluida, wenn sie zu einem Gleichgewichtszustande gekommen sind, so völlig sich gemischt haben, daß sie einen gleichförmigen Körper bilden; 2) daß in diesem Zustande auf jedes Fluidum ein Theil des Gesammtdrucks wirkt, der so groß ist, als er es sein würde, wenn dasselbe allein den ganzen Raum anfüllte. Wenn für einen beliebigen Punkt ϱ_1, ϱ_2, $\varrho_3 \ldots$ die Dichtigkeiten der die Mischung bildenden Fluida, p_1, p_2, $p_3 \ldots$ die Theile des Drucks sind, die auf dieselben resp. wirken; so ist

$$p_1 = k_1 \varrho_1, \quad p_2 = k_2 \varrho_2, \quad p_3 = k_3 \varrho_3 \ldots,$$

wo k_1, k_2, $k_3 \ldots$ constante Coefficienten sind; und wie

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots,$$

so ist offenbar die Dichtigkeit ϱ der Mischung der Summe der Dichtigkeiten jedes Gases, $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots$ gleich.

Demnach geht hier die Gleichung $p = k\varrho$ über in

$$k_1\varrho_1 + k_2\varrho_2 + k_3\varrho_3 \ldots = k(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 \ldots);$$

den hieraus abgeleiteten Ausdruck für k, nämlich

$$k = \frac{k_1\varrho_1 + k_2\varrho_2 + k_3\varrho_3 + \ldots}{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 \ldots}$$

muß man in die Formel von §. 391 substituieren, wenn man sie auf eine Mischung mehrerer Gase anwenden will und erhält dadurch

$$z - Z = \frac{k_1\varrho_1 + k_2\varrho_2 + k_3\varrho_3 + \ldots}{(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots)g} . \log. \frac{P}{p}.$$

§. 393. Wir können die eben gefundenen Resultate auch dann anwenden, wenn nicht ein in einem Gefäße enthaltenes Fluidum, sondern ein Fluidum, welches einen großen Raum einnimmt oder selbst die Atmosphäre der Erde in ihrer ganzen Ausdehnung zur Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen vorliegt; nur muß man, wie aus §. 368 u. ff. hervorgeht, die gemeinsame Richtung der Schwerkraft und der Ordinaten z als senkrecht gegen die Oberfläche der Gewässer annehmen, welche hier nothwendigerweise eine Niveaufläche ist. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben den Höhenunterschied zweier beliebiger Punkte der Atmosphäre nach dem Verhältniß des in jedem dieser Punkte geübten Drucks zu bestimmen. Weil aber die Annahmen, auf denen die vorhergehenden Formeln gegründet sind, daß nämlich die Temperatur und ebenso die Wirksamkeit der Schwerkraft constant sind, für den wirklichen Zustand der Atmosphäre nicht gemacht werden dürfen; so kann man diese Formel zur Höhenberechnung durch Barometerbeobachtungen nicht gebrauchen.

§. 394. Um brauchbarere Formeln aufzustellen, müssen wir auf die in §. 368 aufgestellte Differentialgleichung $dp = \varrho g . d\Pi$ zurückkommen, die hier übergeht in

$$dp = -\varrho g . dz,$$

und bei Integration derselben müssen wir auf die Veränderungen der Schwerkraft, der Temperatur und der Zusammensetzung des atmosphärischen Fluidums Rücksicht nehmen.

Die Intensität der Schwerkraft ändert sich je nach der Breite und nach der Erhebung über das Niveau des Meeres. Wenn wir bezeichnen durch

R den mittlern Erdhalbmesser $= 6366198$ Meter;
L die vom Aequator aus gezählte Breite des Ortes;
z die Höhe des Orts über dem Niveau des Meeres;
g die Geschwindigkeit, welche die Schwerkraft den schweren Körpern unter dem 45 Breitengrad im Niveau des Meeres ertheilt:

so ist

$$g\left(\frac{R}{R+z}\right)^2(1-0{,}002837\cos.2L)$$

der allgemeine Ausdruck für die durch diese Kraft ertheilte Geschwindigkeit.

§. 395. Um den Werth der Dichtigkeit ϱ der Atmosphäre zu bestimmen, bezeichnen wir durch

ϖ das Gewicht des Cubikmeters Quecksilber bei der Temperatur von 0^0 im Niveau des Meeres und in der mittlern Breite von 45^0;
Π das Gewicht des Cubikmeters reiner Luft unter denselben Umständen unter einem Druck $= \varpi(0{,}76)$ für ein Quadratmeter.

Durch Combinierung der von Mariotte und Gay-Lussac aufgestellten Gesetze finden wir, daß das Gewicht des Cubikmeters atmosphärischer Luft an demselben Orte bei der Temperatur t und dem Druck p sein würde

$$\Pi\frac{p}{\varpi(0{,}76)}\,\frac{1}{1+0{,}00375t}.$$

Diese Formel würde unsern Anforderungen Genüge leisten, wenn die Atmosphäre als aus reiner Luft bestehend

angesehen werden dürfte: es läßt sich aber nicht umgehen den Wasserdampf zu berücksichtigen, mit welchem sie fast immer gemischt ist.

Bei derselben Temperatur und unter demselben Druck ist Wasserdampf 0,624 mal leichter als die Luft. Wenn wir demnach durch v die Temperatur, durch p den Druck bezeichnen, welchen eine Mischung von Luft und Wasserdampf zu tragen hat, wovon der Theil $p-f$ auf die Luft, der Theil f auf den Wasserdampf kommt; so ist das Gewicht des Cubikmeters Luft

$$\Pi \frac{p-f}{\varpi(0{,}76)} \cdot \frac{1}{1+0{,}00375\,v},$$

und das Gewicht des Cubikmeters Wasserdampf

$$0{,}624\,\Pi \frac{f}{\varpi(0{,}76)} \frac{1}{1+0{,}00375\,v};$$

demnach das Gewicht des Cubikmeters der Mischung

$$\Pi \frac{p-0{,}376 f}{\varpi(0{,}76)} \cdot \frac{1}{1+0{,}00375\,v}.$$

Wenn die Mischung mit Dampf gesättigt wäre; so würde f der Druck sein, welcher in der Tafel, welche die Elasticität angiebt, die der Wasserdampf im Maximum der Dichtigkeit unter verschiedenen Temperaturen erlangt, der Temperatur v entspricht.

§. 396. Die vorige Formel dürfte unmittelbar statt ϱg in die im Anfange des §. 394 gegebene Differentialgleichung hineingesetzt werden, wenn man sich in der Breite von 45° am Niveau des Meeres befindet, weil sie für diese Orte das Gewicht des Cubikmeters des atmosphärischen Fluidums, das als Mischung aus Luft und Wasserdampf angesehen wird, giebt. Da aber die Intensität dieses Gewichts an den verschiedenen Punkten der Erde ebenso variiert, wie die Einwirkung der Schwerkraft; so muß man nach §. 394 jenen Ausdruck mit

$$\left(\frac{R}{R+z}\right)^2(1-0{,}002837\,.\cos.2L)$$

multiplicieren und erhält so (wenn man durch p dividiert),

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\Pi}{0{,}76\varpi}(1-0{,}002837.\cos.2L)\frac{1-0{,}376\frac{f}{p}}{1+0{,}00375.v}\cdot\frac{R^2dz}{(R+z)^2}.$$

Wenn die veränderlichen Größen $\frac{f}{p}$ und v als Functionen von z gegeben wären, so würde sich diese Gleichung unmittelbar integrieren lassen. Da jedoch zu wenig bekannt ist, in welchem Verhältniß die Menge des Wasserdampfes und die Temperatur mit der Höhe z sich ändern, da außerdem dieses Verhältniß sich mit den Oertern und den atmosphärischen Modificationen ändert; so muß man sich darauf beschränken die mittlern Werthe zu nehmen.

§. 397. Wir müssen von dem Factor $1-0{,}376\frac{f}{p}$ ausgehen. Wenn wir annehmen dürften, daß die Luft stets mit Wasserdampf gesättigt wäre; so könnten wir nach dem bekannten Gesetze der Elasticität des Wasserdampfs in dem Intervall von 0^0 bis 30^0, in welchem meistens die barometrischen Beobachtungen angestellt werden, ohne merklichen Fehler annehmen, daß f proportional mit v wächst; dann ist

$$f=\varpi\,.(0{,}00512+0{,}000865\,.v)\text{ Meter.}$$

Da man nun den wahren Werth, den man dieser Größe beilegen muß, nicht kennt; so nimmt man die Hälfte des Werths, der dem Punkt der Sättigung entspricht und setzt

$$f=\varpi\,.(0{,}00256+0{,}0004325\,.v)\text{ Meter.}$$

Nimmt man ferner für p den mittlern Werth $\varpi\,.(0{,}76)$ Meter, so müssen wir statt des Factors $1-0{,}376\frac{f}{p}$ die Größe substituieren

$$1-0{,}376\,\frac{0{,}00256+0{,}0004325.v}{0{,}76}=1-0{,}001267-0{,}000214.v.$$

Es unterscheidet sich aber der Bruch

$$\frac{1-0{,}001267-0{,}000214.v}{1+0{,}00375.v},$$

wenn man die sehr kleinen Größen der zweiten Ordnung vernachlässigt, sehr wenig von

$$\frac{1-0{,}001267}{1+0{,}004.v},$$

so daß man die Gleichung des vorigen §. durch folgende ersetzen darf:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\Pi(1-0{,}001267)}{0{,}76\varpi}(1-0{,}002837\cos.L)\frac{1}{1+0{,}004.v}\cdot\frac{R^2dz}{(R+z)^2}.$$

Bei der Integration betrachten wir die Temperatur v als constant und geben ihr den Mittelwerth der beiden Temperaturen V und v, welche an den beiden Punkten beobachtet sind, deren Höhenunterschied man berechnen will. Wenn man also die Höhen dieser Punkte über dem Niveau des Meeres durch Z und z, den entsprechenden Druck durch P und p bezeichnet; so erhält man

$$\log.\frac{P}{p}=\frac{\Pi(1-0{,}001267)}{0{,}76.\varpi}(1-0{,}002837\cos.2L)\frac{1}{1+0{,}002(V+v)}\cdot\frac{z-Z}{1+\frac{z+Z}{R}},$$

wenn man die Ausdrücke vernachlässigt, welche durch das Quadrat von R dividiert sind. Der Logarithmus der linken Seite der Gleichung ist ein Neperscher Logarithmus und man hat denselben mit dem Modulus $M=2{,}302585$ zu multiplicieren, wenn man die gewöhnlichen Logarithmentafeln gebrauchen will.

§. 398. Die vorhergehende Gleichung giebt den Höhenunterschied $z-Z$ als Function des Verhältnisses zwischen dem an den beiden in Frage kommenden Punkten wirkenden Druck, $\frac{P}{p}$. Es bleibt uns noch übrig, dieses Verhältniß aus der Beobachtung des Barometers abzuleiten. Wenn

wir durch H und h die in jenen beiden Punkten beobachteten Barometerhöhen, durch U und u die Temperaturen der Quecksilbersäulen bezeichnen, die gewöhnlich von den oben durch V und v bezeichneten Lufttemperaturen verschieden sind; da ferner das Quecksilber sich in dem Intervall von $0^0 - 100^0$ um $\frac{1}{55,50}$ ausdehnt, also das Gewicht des Cubikmeters Quecksilber am Niveau des Meeres unter dem 45. Breitengrade und bei der Temperatur u ist $= \frac{\varpi}{1 + \frac{u}{5550}}$ oder ziemlich genau $\varpi\left(1 - \frac{u}{5550}\right)$ und dasselbe Gewicht unter der Breite L und in der Entfernung $R + z$ vom Mittelpunkt der Erde

$$\varpi(1 - 0{,}002837 \cos. 2L)\left(1 - \frac{u}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+z)^2}$$

wird: so hat man also

$$p = h.\varpi(1 - 0{,}002837 \cos. 2L)\left(1 - \frac{u}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+z)^2} \text{ und}$$

$$P = H.\varpi(1 - 0{,}002837 \cos. 2L)\left(1 - \frac{U}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+Z)^2}.$$

Vernachlässigt man bei Entwickelung der Brüche die sehr kleinen Größen der zweiten Ordnung, so erhält man

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h}\left(1 + \frac{u - U}{5550}\right)\left(1 + \frac{z - Z}{R}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck muß in die obige Gleichung substituiert werden. Wenn man diese Substitution ausführt und bedenkt, daß, wenn x eine sehr kleine Zahl ist, der Nepersche Logarithmus von $1 + x$ beinah völlig $= x$ ist, also der Briggische Logarithmus $= 0{,}434295.x$; so erhält man

$$z-Z=\frac{0{,}76.M.\varpi}{(1-0{,}001267)\Pi}(1+0{,}002837\cos.2L)$$

$$[1+0{,}002(v+V)]\left(1+\frac{z+Z}{R}\right)$$

$$\left[\log.\frac{H}{h}+0{,}434295\left(\frac{u-U}{5550}+2\,\frac{z-Z}{R}\right)\right].$$

Der auf der rechten Seite stehende Logarithmus muß den gewöhnlichen Tafeln entnommen werden. Der Factor $\frac{0{,}76.M.\varpi}{(1-0{,}001267)\Pi}$, in welchem M die Zahl 2,302585 bezeichnet, ist ein constanter Coefficient, dessen Werth man nach dem bekannten Verhältniß zwischen dem Gewicht ϖ des Quecksilbers und dem Gewichte Π der atmosphärischen Luft unter dem 50⁰ Breitengrade, bei der Temperatur von 0⁰ und unter dem Druck von 0,76 Meter bestimmen kann. Versuche von Biot und Arago haben dargethan, daß unter diesen Umständen $\frac{\varpi}{\Pi}=10466{,}8$ ist, woraus der Werth jenes Coefficienten abgeleitet werden kann

$$\frac{0{,}76.M.\varpi}{(1-0{,}001267)\Pi}=18339{,}8 \text{ Meter.}$$

Der Werth dieses Coefficienten kann auch so bestimmt werden, daß man die vorangehende Formel auf barometrische Untersuchungen anwendet, welche in solchen Oertern angestellt sind, deren Höhenunterschied man durch anderes Verfahren ermittelt hat. Wirklich hat Ramond durch Untersuchungen, die er in den Pyrenäen machte, noch ehe das genaue Verhältniß zwischen den specifischen Gewichten der Luft und des Quecksilbers berechnet war, auf diese Weise als Werth jenes Coefficienten 18336 Meter gefunden, der sich von dem obigen nur wenig unterscheidet. Wir setzen deshalb einfach

$$z - Z = 18336 \text{ Meter } (1 + 0{,}002837 \cos. 2L)$$
$$[1 + 0{,}002 (v + V)] \left(1 + \frac{z + Z}{R}\right)$$
$$\left[\log. \frac{H}{h} + 0{,}434295 \left(\frac{u - U}{5550} + 2 \frac{z - Z}{R}\right)\right].$$

§. 399. Es muß noch bemerkt werden, daß Ramond den Coefficienten 18336 Meter erst aus einem andern Coefficienten 18393 Meter, den er durch seine Beobachtungen unmittelbar gefunden hatte, ableitete, indem er die verticale Abnahme der Schwerkraft in höhern Gegenden berücksichtigte und das Resultat, das er in den höhern Oertern, wo die Beobachtungen gemacht sind, erlangt hatte, auf das Niveau des Meeres zurückführte. Wenn man demnach statt 18336 Meter, 18393 Meter schreibt; so lassen sich dadurch in der obigen Gleichung annähernd die Factoren ersetzen, welche wegen der Abnahme der Schwerkraft nach verticaler Richtung eingeführt sind und dies sind diejenigen, welche R im Nenner haben. So darf man also diese einfachere Formel gebrauchen

$$z - Z = 18393 \text{ Meter } (1 + 0{,}002837 \cos. 2L)$$
$$[1 + 0{,}002 (v + V)]$$
$$\left[\log. \frac{H}{h} + 0{,}00007825 (u - U)\right].$$

Man könnte auch den Factor $(1 + 0{,}002837 . \cos. 2L)$ auf die Einheit reducieren. Doch es ist besser sich der unten gegebenen Tafel zu bedienen, welche die Logarithmen der Producte von 18393 in die Werthe dieses Factors für verschiedene Breiten enthält. Mehrfach sind sehr umfangreiche Tafeln angefertigt, welche die Berechnung nach den barometrischen Beobachtungen erleichtern sollen: aber es scheint der Gebrauch dieser Tafeln wenig Vortheil vor der unmittelbaren Anwendung der vorigen Gleichung voraus

zu haben, wenn man sich der gewöhnlichen Logarithmentafeln bedient.

Die vom Aequator aus gezählten Breiten = L	Logarithmen der Zahlen 18393(1+0,002837.cos.2L)
0°	4,2658830
5°	8643
10°	8089
15°	7184
20°	5955
25°	4439
30°	2682
35°	0738
40°	4,2648665
45°	6526
50°	4386
55°	2310
60°	0361
65°	4,2638599
70°	7077

Wir fügen folgendes Beispiel hinzu:

Breite 1°45'. Auf dem höhern Punkte: $v = -1{,}6^0$	$h = 167{,}2$	$u = 10{,}0^0$
Auf dem tiefern Punkte: $V = 25{,}3^0$	$H = 337{,}79$	$U = 25{,}3^0$
$23{,}7^0$		$-15{,}3^0 = u - U$
$2(v+V) = 47{,}4^0$		
Logarithmus des Coefficienten für 0° Breite		4,265883
Log. 1,0474		0,020113
Log. 337,79 2,528660		
Log. 167,2 2,223236		
Differenz 0,305424		
0,00007825(−15,3) − 0,001197		
0,304227, wovon der Logarithmus ist . .		0,483198 − 1
Logarithmus der gesuchten Höhe (5877,5 Meter)		3,769194

Wir haben hier nach Humboldts Beobachtungen die Höhe des Chimboraço berechnet und dies ist einer von den Fällen, in welchen die vernachlässigten Formeln merklicher hervortreten könnten. Aber es hat Ramond unter Zuziehung jener Ausdrücke doch nur 5879,2 statt 5877,5 Meter gefunden; der Unterschied dieser beiden Resultate kommt bei der so bedeutenden Höhe wenig in Betracht.

Als zweites Beispiel wollen wir die Berechnung der Höhe des Guanaxuato hinzufügen, das in dem Annuaire du Bureau des longitudes als Beispiel gewählt ist.

Breite 21°. Auf dem höhern Punkte: $v = 21,3^0$	$h = 600,95$	$u = 21,3^0$
Auf dem tiefern Punkte: $V = 25,3^0$	$H = 763,15$	$U = 25,3^0$
$46,6^0$		$u - U = -4,0^0$
$2(v + V) = 93,2^0$		
Logarithmus des Coefficienten für 20° Breite		4,2655952
Log. 1,0932		0,0386996
Log. 763,15	2,8826099	
Log. 600,95	2,7788383	
Differenz	0,1037716	
$0,00007825(-4,0)$ —	0,0003130	
	0,1034586, wovon der Logarithmus ist ..	$0,0247655-1$
Logarithmus der gesuchten Höhe (2133,3 Meter)		3,3290603

§. 400. Die Zahlen h und H in den vorangehenden Formeln lies't man auf der Scala des Barometers je nach der Länge der Quecksilbersäulen ab, welche auf dem höhern und auf dem tiefern Standpunkte dem atmosphärischen

Drucke das Gleichgewicht halten. Um vollständige Genauigkeit zu erzielen muß man auch auf die Ausdehnung der Körper Rücksicht nehmen, auf welche die Scala graviert ist. Wenn δ die lineäre Ausdehnung dieser Körper für einen Grad des hunderttheiligen Thermometers ist, so daß die Länge 1 bei der Temperatur 0^0 bei der Temperatur $u = 1 + \delta u$ wird; so werden die bezüglich bei den Temperaturen u und U beobachten Höhen h und H, auf die Temperatur 0^0 reduciert $\frac{h}{1+\delta u}$ und $\frac{H}{1+\delta U}$. Wenn man folglich auch diese Veränderung berücksichtigen will, so muß man in die Formel von §. 398 $\frac{H}{h} \cdot \frac{1+\delta u}{1+\delta U}$ oder beinah genau $\frac{H}{h}[1+\delta(u-U)]$ statt $\frac{H}{h}$ einführen. Es muß also in §. 398 und 399 der Coefficient von $u - U$ um das Product aus δ in die Zahl 0,434295 vermehrt werden. Nach den bekannten Resultaten bestimmt man nun diesen Coefficienten folgendermaßen:

Wenn die Ausdehnung der Scala $= 0$ gesetzt wird 0,00007825
Scalen auf Glas und auf Holz 0,00008205
Scalen auf Kupfer . . . . 0,00008641.

Wenn man vorher das Product aus diesen Coefficienten in die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 in einer Tafel zusammenstellt; so scheint die Berechnung der Höhen durch die Formel des §. 399 so wenig zeitraubend, als man nur wünschen kann.

§. 401. Die barometrischen Untersuchungen und die Benutzung der obigen Formel zur Bestimmung des Höhenunterschieds verschiedener Punkte erfordern große Vorsicht. Denn jene Formel basiert auf der Annahme eines Gleichgewichtszustandes, einer Beschaffenheit der Wärme- und

Feuchtigkeitsverhältnisse, wie sie nur selten in der Atmosphäre vorkommen. Wir geben demnach, da man aus der Erfahrung weiß, welche Umstände den Beobachtungen mehr oder weniger günstig sind, nach Ramond folgende Regeln:

„1) Man darf hoffen, daß die Beobachtungen genau „sind, wenn man Mittags, bei ruhigem, nicht zu sehr zu „Veränderung geneigtem Wetter beobachtet. Beide Barometer müssen sich auf isolierten Gipfeln befinden oder das „untere Barometer in mäßiger Entfernung in einer offnen „Ebene. In dem letztern Falle ist es sogar besser, daß die „Entfernung größer wird, als daß man das Barometer „am Fuße der Gebirge beobachtet, wo der aus der größern „Nähe erwachsende Vortheil durch die störende Einwirkung „der herabwehenden Winde mehr als aufgewogen wird. „Wenn man nicht unter diesen besonders günstigen Umständen beobachtet, so lassen sich die etwa eintretenden „Irrungen nicht mit Sicherheit abschätzen: dies kann nur „nach Gutdünken geschehen; größere Erfahrung freilich setzt „den Beobachter in Stand je nach den Ursachen, welche die „Irrthümer hervorbringen, dieselben einigermaßen genau „zu verbessern.

„2) Man berechnet gewöhnlich die Höhen zu niedrig:

„Wenn man Morgens oder Abends beobachtet;

„Wenn das obere Barometer in einem engen und „tiefen Thale sich befindet, während das untere in einer „Ebene ist;

„Wenn starker Südwind weht;

„Wenn es offenbar stürmisch werden wird.

„3) Man berechnet im Gegentheil die Höhen zu hoch:

„Wenn man zwischen Mittag und zwei bis drei Uhr „beobachtet, vorzüglich im Sommer und wenn die Sonne „nicht von Wolken bedeckt ist;

„Wenn das obere Barometer auf dem Gipfel eines „Berges, das untere in einem engen und stark beherrschten „Grund sich befindet;

„Wenn starker Nordwind herrscht, besonders wenn „man auf einem Berge ist und derselbe gegen die steilste „Seite weht.

„4) Endlich sind ganz sicher die Irrthümer groß und „nach allen Richtungen veränderlich, wenn die Höhenunter„schiede unbedeutend sind und die beiden Barometer sich in der„selben Ebene oder demselben Thale befinden; noch mehr „ist dies der Fall, wenn man in zwei durch eine Berg„kette getrennten Thälern die Beobachtungen anstellt. In „diesem Falle kann die horizontale Entfernung nicht klein „genug genommen werden und trotzdem ist es nöthig das „Mittel aus einer großen Zahl von Beobachtungen zu „nehmen, um einigermaßen Sicherheit zu erlangen."

Die Winde und die Unregelmäßigkeit der Temperaturveränderungen sind Hauptursachen der Irrthümer. Wäre die Richtung der Bewegung der Luft horizontal, so würde sie anscheinend keine Veränderung der Höhe des Barometers hervorbringen, wenigstens sobald sein Gefäß vor dem Winde durch ein Hinderniß geschützt ist, das den Druck desselben vermindert. Wenn der Wind aber nach oben oder nach unten weht, so ist der Stand des Quecksilbers nothwendig tiefer oder höher, als es ohne den Wind der Fall sein würde, abgesehen von den Unregelmäßigkeiten, welche aus der Art erwachsen, wie das Gefäß dem Winde ausgesetzt oder davor geschützt ist. Die Fehler, welche aus der Unregelmäßigkeit der Temperaturveränderungen erwachsen, sind vielleicht weniger bedeutend, als die Fehler, welche daher stammen, daß das Thermometer nicht die wirkliche Temperatur der horizontalen Luftschicht, in der man sich befindet, sondern eine lokale Temperatur giebt, die

großentheils durch Wärmeausstrahlung der Erde und der umgebenden Körper hervorgebracht wird.

Man hält allgemein die Gefäßbarometer, deren Höhe man durch eine Druckschraube bestimmt, die eine feine Spitze mit dem Quecksilber in Berührung bringt, für die besten. Es ist wichtig genau die Temperatur des Quecksilbers zu kennen. Ein in die Fassung eingefügtes Thermometer genügt dazu nicht. Man hat eine andere Vorrichtung dazu vorgeschlagen, nämlich eine zweite Röhre, die der des Barometers gleich und ebenso geschlossen ist, mit Quecksilber zu füllen, in welches das Thermometer eingetaucht ist. Zu Höhenberechnungen ist es unumgänglich nothwendig, daß zwei Beobachter, mit gleichen und genau verglichenen Instrumenten versehen gleichzeitig die entsprechenden Beobachtungen machen; diese sind stets zwischen 11 und 1 Uhr Mittags zu machen. Man weiß, daß in den Barometern die Quecksilbersäule in Folge der Capillarität kürzer ist, als sie sein müßte. Die Größe dieser Herabdrückung hängt von dem Durchmesser der Röhre ab; der Werth derselben ist in der nebenanstehenden Tafel gegeben. Gewöhnlich zieht man dieselbe nicht in Betracht, weil sie gleichmäßig in beiden Instrumenten eintritt, wenn die Röhren derselben gleiche Durchmesser haben. Da aber das Resultat nicht von dem Unterschiede, sondern von dem Verhältniß der Barometerhöhen abhängt; so ist es noth=

Durchmesser der Röhre	Herabdrückung
Millimeter	Millimeter
2	4,560
3	2,902
4	2,039
5	1,506
6	1,148
7	0,881
8	0,685
9	0,535
10	0,420
11	0,351
12	0,260
13	0,205
14	0,160
15	0,125
16	0,097
17	0,075
18	0,059
19	0,043
20	0,035

wendig darauf Rücksicht zu nehmen, zumal wenn der Höhenunterschied nicht sehr bedeutend ist. Die Barometer müssen in verticaler Stellung vor Wind und Sonne geschützt gehalten werden. Das Thermometer, welches die Temperatur der Luft angiebt, muß in freier Lage in der Höhe des Auges gehalten werden, und allein vor der Sonne geschützt sein durch das Brett, an welchem es befestigt ist.

XXVIII. Hauptgleichungen der Bewegung eines Fluidums unter Einwirkung beliebiger Kräfte.

---

§. 402. Wenn ein Fluidum in Bewegung zur Untersuchung vorliegt, dessen Theile durch gegebene Kräfte angegriffen werden; so bezeichnen wir durch:

x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts des Fluidums, die von einem festen Anfangspunkte aus auf drei rechtwinklichten Axen gezählt sind;

X, Y, Z die Geschwindigkeiten, welche die Kraft, auf das in diesem Punkte liegende Theilchen wirkend, der Einheit der Masse in der Zeiteinheit nach Richtung der x, y und z ertheilt;

u, v, w die Geschwindigkeiten dieses Theilchens am Ende der Zeit t nach Richtung der x, y und z;

ϱ die Masse der Volumenseinheit oder die Dichtigkeit des Fluidums in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, am Ende der Zeit t;

p der Werth des Drucks auf die Flächeneinheit am Ende der Zeit t in demselben Punkte.

Die Größen u, v, w und ϱ müssen als veränderliche Functionen der Coordinaten x, y, z und der Zeit t

angesehen werden; dasselbe ist gewöhnlich bei den durch X, Y, Z bezeichneten Kräften der Fall. Wird nun angenommen, daß das Fluidum bei seiner Bewegung beständig eine zusammenhängende Masse bildet, daß also die Theile desselben sich weder von einander, noch von den festen Wänden trennen, gegen welche das Fluidum sich stützen kann; so ist die Bewegung gewissen allgemeinen Bedingungen unterworfen, für welche den analytischen Ausdruck zu finden unsere Aufgabe ist.

Die Verhältnisse, welche zwischen den Geschwindigkeiten der Theile des Fluidums und den auf sie wirkenden Kräften bestehen, erhält man durch Anwendung des Alembertschen Princips (Vergl. §. 257), welche auf jedes System materieller Elemente gestattet ist: man muß also ausdrücken, daß beständig sich die durch jedes der Elemente des Fluidums verlorenen Kräfte das Gleichgewicht halten müssen. Die verlorene Kraft für das Theilchen des Fluidums, welches in dem Punkte liegt, dessen Coordinaten x, y, z sind, ist hier die Kraft, welche der Masseneinheit in der Zeit dt die Geschwindigkeiten $Xdt - du$, $Ydt - dv$, $Zdt - dw$ nach Richtung der x, y und z zu ertheilen vermag. Nach §. 364 drückt man demnach die Bedingung des Gleichgewichts der Flüssigkeit durch die Gleichung aus

$$dp = \varrho\left(\frac{Xdt - du}{dt}dx + \frac{Ydt - dv}{dt}dy + \frac{Zdt - dw}{dt}dz\right);$$

die rechte Seite derselben muß ein vollständiges Differential der Veränderlichen x, y, z sein und man muß daher die drei besondern Gleichungen haben

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\,\frac{Xdt - du}{dt},$$

$$\frac{dp}{dy} = \varrho\,\frac{Ydt - dv}{dt},$$

$$\frac{dp}{dz} = \varrho\,\frac{Zdt - dw}{dt}.$$

In diesen Gleichungen stellen die Differentiale du, dv, dw resp. die Zunahmen dar, welche die Geschwindigkeiten u, v, w in der unendlich kleinen Zeit dt erhalten. Nun verändern sich aber diese Geschwindigkeiten gewöhnlich in dem Maße, wie die Zeit verfließt und zwar entweder in Folge der Veränderungen, die in dem Punkte, in welchem das Theilchen gerade liegt, eintreten, oder in Folge der Verschiebungen, welche jenes Theilchen erleidet, d. h. also in Folge der Veränderungen, welche die Coordinaten x, y, z als Functionen der Zeit t angesehen erleiden. Es ist demnach der vollständige Ausdruck z. B. für du

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}dt + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}dt + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}dt;$$

oder weil

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w:$$

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}u\,dt + \frac{du}{dy}v\,dt + \frac{du}{dt}w\,dt.$$

Weil natürlich dasselbe auch von den Geschwindigkeiten v und w gilt, so muß man in den obigen Gleichungen den Differentialen dv und dw folgende Werthe geben

$$dv = \left(\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}.u + \frac{dv}{dy}.v + \frac{dv}{dz}.w\right)dt,$$

$$dw = \left(\frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dx}.u + \frac{dw}{dy}.v + \frac{dw}{dz}.w\right)dt.$$

Dadurch erhalten jene Gleichungen diese Form

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= \varrho\left(X - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx}u - \frac{du}{dy}v - \frac{du}{dz}w\right)\\ \frac{dp}{dy} &= \varrho\left(Y - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx}u - \frac{dv}{dy}v - \frac{dv}{dz}w\right)\\ \frac{dp}{dz} &= \varrho\left(Z - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx}u - \frac{dw}{dy}v - \frac{dw}{dz}w\right)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Sie passen auf alle Punkte des Fluidums und ihnen müssen

die in Werthen von t, x, y und z gegebenen Ausdrücke für u, v, w und p, welche den Zustand der Bewegung dieses Körpers ausdrücken, Genüge leisten.

§. 403. Um die nothwendige Bedingung, daß das Fluidum eine zusammenhängende Masse bildet, zu berücksichtigen, denken wir uns das rechtwinklichte Element des Volumens, dessen Dimensionen dx, dy und dz sind. Die Masse des Fluidums, welche am Ende der Zeit t in diesem Elemente enthalten ist, ist $\varrho . dx . dy . dz$; diese wird am Ende der Zeit $t + dt = \left(\varrho + \frac{d\varrho}{dt} dt\right) dx . dy . dz$. Man drückt nun aus, daß keine Trennung der Theilchen des Fluidums eingetreten ist, wenn man die Zunahme $\frac{d\varrho}{dt} . dt . dx\, dy\, dz$ jener Masse in der Zeit dt der Differenz zwischen der Masse des Fluidums gleich setzt, die in derselben Zeit in das genannte Volumenselement durch die drei dem Anfangspunkte der Coordinaten nächsten Seitenflächen eingetreten ist und der durch die drei entgegengesetzten Seitenflächen ausgetretenen Masse des Fluidums. Die durch die drei erstern Seitenflächen in der Zeit dt eintretende Masse des Fluidums ist

$$dy\, dz . \varrho u dt + dx\, dz . \varrho v dt + dx\, dy . \varrho w dt,$$

und die in derselben Zeit durch die drei entgegengesetzten Seitenflächen austretende

$$dy\, dz\left(\varrho u + \frac{d.\varrho u}{dx} dx\right) dt + dx\, dz\left(\varrho v + \frac{d.\varrho v}{dy} dy\right) dt$$
$$+ dx\, dy\left(\varrho w + \frac{d.\varrho w}{dz} dz\right) dt.$$

Demnach ist der Ueberschuß der erstern über die zweite

$$- dx\, dy\, dz\left(\frac{d.\varrho u}{dx} + \frac{d.\varrho v}{dy} + \frac{d.\varrho w}{dz}\right) dt.$$

Setzt man diese Größe der Zunahme

$$\frac{d\varrho}{dt} . dt . dx\, dy\, dz$$

gleich; so erhält man mit Weglassung der gemeinsamen Factoren folgende Gleichung, welche von einigen Gleichung der Continuität genannt wird:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \frac{d.\varrho u}{dx} + \frac{d.\varrho v}{dy} + \frac{d.\varrho w}{dz} = 0. \qquad (2)$$

Auch dieser Gleichung müssen für alle Punkte des Fluidums die als Functionen von t, x, y und z gegebenen Ausdrücke für u, v, w und ϱ Genüge leisten.

§. 404. Die Gleichungen (1) und (2) gelten für alle Fälle, wo die Bewegung eines Fluidums unserer Untersuchung vorliegt. Wir wollen nur folgende Bemerkungen hinzufügen:

1) Bei einem tropfbar flüssigen und gleichförmigen Fluidum ist ϱ constant und die Gleichung (2) reduciert sich also auf

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0; \qquad (3)$$

sie sagt aus, daß das Volumen eines beliebigen Theils der Flüssigkeit bei Verschiebung des Theiles sich nicht ändert.

2) Für ein tropfbar flüssiges und nicht gleichförmiges Fluidum zerfällt die Gleichung (2) nothwendig in die beiden folgenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= 0, \\ \frac{d\varrho}{dt} + u\frac{d\varrho}{dx} + v\frac{d\varrho}{dy} + w\frac{d\varrho}{dz} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

welche beide für sich bestehen müssen.

3) Für ein luftförmiges Fluidum von gleichförmiger und constanter Temperatur ist

$$p = k\varrho,$$

wo k, wie in §. 369 einen constanten Coefficienten bezeichnet.

Wenn der Anfangszustand gegeben ist und das Fluidum wie ein Körper von unendlicher Ausdehnung nach allen Seiten betrachtet wird; so genügen die obigen Gleichungen stets um die unbekannten Größen u, v, w und ϱ als Function von x, y, z und t zu bestimmen und die Beschaffenheit der Bewegung nachzuweisen.

§. 405. Wenn aber der Raum, den das Fluidum einnimmt, begrenzt ist, so daß es sich beständig gegen eine feste Wand stützt; so sind offenbar die an diese Wand stoßenden Theilchen unbeweglich oder bewegen sich in der an die Fläche gelegten Berührungsebene. Ist allgemein

$$F = 0$$

die Gleichung der Fläche jener Wand, in welcher F eine Function der Coordinaten x, y und z ist; so wird die genannte Bedingung ausgedrückt durch die Gleichung

$$\frac{dF}{dx} u + \frac{dF}{dy} v + \frac{dF}{dz} w = 0, \qquad (5)$$

welcher die Ausdrücke für u, v und w Genüge leisten müssen, wenn man x, y und z die Werthe beilegt, die der Gleichung $F = 0$ Genüge leisten, d. h. die Werthe, welche der an die feste Wand angrenzenden Oberfläche des Fluidums angehören.

§. 406. Wenn die Flüssigkeit sich gegen eine bewegliche Wand stützt, deren Gleichung gleichfalls $F = 0$ sein möge, wo jetzt aber F eine Function von x, y, z und t bezeichnet; so erhält man, wenn diese Gleichung in Beziehung auf alle in ihr enthaltenen Veränderlichen differentiiert

$$\frac{dF}{dt} dt + \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0.$$

Man drückt nun augenscheinlich die Bedingung, daß ein an der Oberfläche der Wand liegendes Theilchen sich

bewegt ohne dieselbe zu verlassen, dadurch aus, daß man in dieser Gleichung den Differentialen dx, dy, dz die Werthe udt, vdt, wdt beilegt. Dadurch verändert sie sich in

$$\frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx} u + \frac{dF}{dy} v + \frac{dF}{dz} w = 0. \qquad (6)$$

In dem genannten Falle müssen die Werthe der der Oberfläche des Fluidums angehörenden Coordinaten dieser letzten Gleichung Genüge leisten.

§. 407. Ist die Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit frei und wirkt auf alle Punkte derselben ein gleichförmiger, constanter Druck, so ist für die ganze Ausdehnung derselben

$$p - P = 0,$$

wo P diesen constanten Druck bezeichnet. Nach Gleichung (6) drückt man aus, daß die an der freien Oberfläche liegenden Flüssigkeitstheilchen sich bewegen ohne sie zu verlassen, wenn man die Gleichung aufstellt

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dp}{dx} u + \frac{dp}{dy} v + \frac{dp}{dz} w = 0; \qquad (7)$$

ihr müssen die Werthe der dieser freien Oberfläche angehörenden Coordinaten Genüge leisten.

§. 408. Bis hierher haben wir x, y und z als die Coordinaten eines beliebigen Punkts in dem Raume, den die Flüssigkeit einnimmt, von einem festen Anfangspunkte aus gezählt, angesehen, so daß dieselben unabhängige Veränderliche sind. Ebenso gut kann man sich denken, daß x, y und z die Coordinaten eines bestimmten Theilchens des Fluidums sind und man hat dann die Beziehungen

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt.$$

Wenn man diese neue Bezeichnung in die von §. 402 an aufgestellten Gleichungen einführt, so ändert man in denselben nichts; aber dann darf man diese Veränderlichen

nicht mehr als unabhängig ansehen, indem sie Functionen von t werden, das nun die einzige unabhängige Veränderliche ist. Hat man aus den bezeichneten Gleichungen die Ausdrücke für u, v, w, p und ϱ in Form von Functionen von x, y, z und t entwickelt; so findet man die Ausdrücke für x, y und z als Functionen von t durch Integration der obigen Differentialgleichungen, nach welchen

$$x = x_0 + \int u dt, \quad y = y_0 + \int v dt, \quad z = z_0 + \int w dt, \quad (8)$$

die Coordinaten des Flüssigkeitstheilchens am Ende der Zeit t sind, dessen anfängliche Coordinaten x_0, y_0, und z_0 sind.

Eliminiert man t aus den drei Gleichungen (8); so erhält man zwei verschiedene Gleichungen zwischen den Veränderlichen x, y und z, welche der Curve angehören, die das Theilchen beschreibt, dessen anfängliche Coordinaten x_0, y_0 und z_0 sind. Alle Curven, welche die Theilchen des Fluidums beschreiben, werden demnach durch zwei Gleichungen ausgedrückt. Für die verschiedenen Theilchen können sich die Gleichungen nur durch die Werthe der Constanten x_0, y_0, z_0 unterscheiden, welche die Coordinaten des ersten Punkts jeder Curve darstellen. Da ein Theilchen, welches sich im Augenblicke, wo man beginnt die Zeit zu zählen, an der Oberfläche des Fluidums befindet, nach §. 405 sich beständig nach Richtung der Oberfläche bewegen muß; so stimmen nothwendigerweise die Gleichungen, welche das System der durch die Massetheilchen beschriebenen Curven ausdrücken, mit den Gleichungen (5) und (6) in §. 405 und 406 überein, wenn in dem in Frage kommenden Theile die Oberfläche sich gegen eine feste Wand stützt, oder mit der Gleichung (7) in §. 407, wenn die Oberfläche der tropfbaren Flüssigkeit frei ist, sobald man statt der Constanten x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines beliebigen Punkts

der Oberfläche, wie sie im Anfange der Bewegung sind, in dieselben hineinsetzt.

Besonderer Fall, daß die Function $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z ist.

§. 409. Wenn man annimmt, daß die Function $udx + vdy + wdz$ das vollständige in Beziehung auf x, y und z genommene Differential einer Function φ dieser drei Veränderlichen ist — sie muß jedoch gewöhnlich auch die Zeit t enthalten —; so ist

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}$$

und

$$d\varphi = udx + vdy + wdz,$$

indem $d\varphi$ das Differential der Function φ ist, das man erhält, wenn man allein x, y und z sich verändern läßt. Addiert man aber die drei Gleichungen (1) in §. 402, nachdem man sie zuvor resp. mit dx, dy, dz multipliciert hat, so erhält man

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}dx \\ + \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy}dy \\ + \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz}dz \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} Xdx - \frac{du}{dt}dx - u\frac{du}{dx}dx - v\frac{du}{dy}dx - w\frac{du}{dz}dx \\ + Ydy - \frac{dv}{dt}dy - u\frac{dv}{dx}dy - v\frac{dv}{dy}dy - w\frac{dv}{dz}dy \\ + Zdz - \frac{dw}{dt}dz - u\frac{dw}{dx}dz - v\frac{dw}{dy}dz - w\frac{dw}{dz}dz \end{array}\right\}.$$

Nach der vorigen Gleichung läßt sich diese Gleichung so schreiben

$$\frac{dp}{\varrho} = Xdx + Ydy + Zdz$$
$$- d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}d\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dy}d\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\varphi}{dz}d\frac{d\varphi}{dz};$$

oder auch so

$$\frac{dp}{\varrho} = Xdx + Ydy + Zdz$$
$$- d\,\frac{d\varphi}{dt} - \tfrac{1}{2}d.\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

man muß dabei nicht vergessen, daß die durch das Zeichen d bezeichneten Differentiale so genommen sind, daß man allein x, y und z sich verändern läßt.

§. 410. Diese Gleichung läßt sich unmittelbar integrieren, wenn das Verhältniß von p und ϱ bekannt ist. In einem gleichförmigen tropfbar flüssigen Fluidum, in welchem die Dichtigkeit ϱ constant ist, werden die Gleichungen (1) und (3) durch folgende ersetzt:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p}{\varrho} = \text{Const.} + \int(Xdx + Ydy + Zdz) \\ \quad - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right], \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \end{array}\right\} \quad (a)$$

Sobald der Anfangszustand der Flüssigkeit bekannt ist, genügen sie um die Bewegung derselben zu bestimmen, wenn sie nach allen Seiten hin bis ins Unendliche ausgedehnt ist. Hat man aus diesen Gleichungen φ und p als Functionen von x, y, z und t bestimmt, so erhält man die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen durch die Gleichungen

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Ist die Ausdehnung eines Fluidums begrenzt; so muß für die besondern Werthe von x, y, z, die der Oberfläche angehören, die Function φ den bestimmten Gleichungen (5), (6) und (7) Genüge leisten; man muß demnach für alle Punkte einer festen Wand haben

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dz} = 0; \qquad \text{(b)}$$

und für alle Punkte einer beweglichen Wand

$$\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dz}=0, \qquad (c)$$

wo $F=0$ die Flächengleichung dieser Wand ist; endlich hat man

$$\frac{dp}{dt}+\frac{dp}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dp}{dz}\frac{d\varphi}{dz}=0 \qquad (d)$$

für die Punkte einer freien Oberfläche, welche einem gleichförmigen und constanten senkrechten Drucke p unterliegt.

§. 411. Nimmt man in einem luftförmigen Fluidum die Temperatur als gleichmäßig und constant an (was man bei praktischer Anwendung nicht thun darf, wenn die Bewegung merkliche Veränderungen in der Dichtigkeit der Theile veranlaßt); so ist $p=k\varrho$, wo k ein constanter Coefficient ist. Dann sind die unbestimmten Gleichungen, welche die Bedingungen der Bewegung des Fluidums ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} kl\varrho &= \text{Const.}+\int(Xdx+Ydy\ Zdz) \\ &\quad -\frac{d\varphi}{dt}-\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] \\ \frac{dp}{dt}&+\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(p\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(p\frac{d\varphi}{dz}\right)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

und wenn das Fluidum durch eine feste Wand abgesperrt ist, so muß die Function φ mit den dieser Wand angehörenden Werthe von x, y, z den bestimmten Gleichungen (b) oder (c) des vorigen §. Genüge leisten.

§. 412. Da die letztgegebenen Gleichungen leichter lösbar scheinen, als die in §. 402 und ff. gegebenen; so kommt es darauf an, die besondern Fälle zu unterscheiden, in welchen die Bewegung des Fluidums es erlaubt die Geschwindigkeiten u, v, w von vornherein den partiellen in Beziehung auf x, y, z genommenen Differentialquotienten einer Function φ von x, y, z und t gleich zu setzen. Lagrange

hat bewiesen, daß dies in allen Epochen der Bewegung der Fall ist, wenn es in einem einzigen Augenblicke der Fall ist; vorausgesetzt jedoch, daß die Function $Xdx + Ydy + Zdz$ selbst ein vollständiges Differential von x, y, z ist. Man darf folglich diesen Satz stets anwenden, wenn die Flüssigkeitstheilchen im Anfangszustande keine Geschwindigkeit haben. Ebenso können die in §. 410 und 411 gegebenen Gleichungen in allen den Fällen angewandt werden, wo die Bewegungen von Fluiden in Schwingungen oder Vibrationen bestehen: alsdann darf man die Geschwindigkeiten und Verschiebungen der Theilchen als klein genug ansehen, daß man ohne Fehler ihre höhern Potenzen und Producte vernachlässigen kann.

XXIX. Bewegung eines Fluidums in einem Gefäße. Hypothese vom Parallelismus der Schichten.

---

§. 413. Wenden wir auf die Bewegung eines Fluidums, das der Einwirkung der Schwerkraft unterliegt und in einer Röhre von beliebiger Gestalt, aber von einem äußerst kleinen Querschnitt, enthalten ist, die im vorigen Capitel gegebenen Resultate an, wie wir auch die dort angewandten Beziehungen beibehalten wollen; so sehen wir, daß zunächst, wenn die Ordinaten z vertical sind und von oben nach unten gezählt werden, hier $X=0$, $Y=0$, $Z=g$: dadurch reduciert sich die Function $Xdx + Ydy + Zdz$ in der Gleichung von §. 409 auf gdz.

Da zweitens die Weite der Röhre als sehr klein angenommen ist; so darf man die gegen die Axe der Röhre senkrechten Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen gegen die Geschwindigkeiten derselben Theilchen nach Richtung jener Axe vernach-

lässigen: man darf also allen Theilchen, welche in einem senkrecht gegen die Axe gelegten Schnitte liegen, dieselbe Bewegung zuschreiben, wie sie die in der Axe selbst liegenden Theilchen haben. Ist ferner m ein Querschnitt der Röhre und sind x, y, z die Coordinaten des Punkts, in welchem derselbe die Axe schneidet; so ist die Geschwindigkeit des in der Axe liegenden Theilchens, wenn man durch s die Länge der Axe von einem festen Anfangspunkte aus bis zu diesem Punkte gezählt bezeichnet, $=\frac{ds}{dt}$ und die Function $d\varphi = udx + vdy + wdz$ reduciert sich auf $\frac{ds}{dt}ds$: man muß ferner dieser Function für alle in dem Schnitte m liegenden Theilchen denselben Werth zuschreiben. Setzen wir, um abzukürzen, u statt $\frac{ds}{dt}$, so daß u die Geschwindigkeit des Fluidums nach Richtung der Röhrenaxe bezeichnet; so ist $d\varphi = uds$ und die Gleichung von §. 409, auf die in der Axe der Röhre liegenden Theilchen angewandt, giebt

$$\frac{dp}{\varrho} = gdz - \frac{du}{dt}ds - \tfrac{1}{2}d\,.\,u^2. \qquad \text{(A)}$$

Dieselbe Gleichung gilt für alle Theilchen, die in einem senkrecht gegen die Axe gelegten Schnitte liegen. Die Differentiale dz, dp und du^2 sind so genommen, daß man allein s sich verändern läßt.

§. 414. In Beziehung auf die Continuitätsgleichung des Fluidums ist es zweckmäßig, ebenso, wie dies in §. 403 geschehen ist, zu verfahren. Wenn also ω die sehr kleine Fläche des Querschnitts der Röhre im Punkte m ist; so ist die Masse des Fluidums, welche in dem hinter diesem Schnitte liegenden Röhrenelemente von der Dicke ds am Ende der Zeit t enthalten ist, $\varrho\omega ds$, und am Ende der Zeit $t+dt$ ist dieselbe $\left(\varrho + \frac{d\varrho}{dt}dt\right)\omega ds$. Nach den oben

gemachten Annahmen ist während der Zeit dt auf der einen Seite eine Masse des Fluidums $= \varrho\omega u dt$ eingetreten, auf der andern Seite ist eine Masse $= \left(\varrho\omega u + \frac{d.\varrho\omega u}{ds}ds\right)dt$ ausgetreten: darnach ist die gesuchte Continuitätsgleichung

$$\omega\frac{d\varrho}{dt} + \frac{d.\varrho\omega u}{ds} = 0. \qquad \text{(B)}$$

§. 415. Auf die Gleichung (A) ist man in §. 413 dadurch geführt, daß man das Fluidum durch senkrecht gegen die Röhrenaxe gelegte Ebenen in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, und annimmt, daß die in jeder Schicht liegenden Theilchen ein und dieselbe Geschwindigkeit nach Richtung dieser Axe haben. Wir können, wenn wir uns ein solches System denken, direct die Bedingungen der Bewegung einer beliebigen Schicht finden. Die Masse der Schicht m ist $\varrho.\omega ds$, ihr Gewicht $\varrho g.\omega ds$, das nach Richtung der Röhrenaxe einen Druck $= \varrho g.\omega ds\frac{dz}{ds}$ oder $\varrho g\omega dz$ ausübt. Ferner wirkt auf die obere Seite der Schicht der Druck $p\omega$, während auf die untere Seite nach entgegengesetzter Richtung der Druck $(p+dp)(\omega+d\omega)$ wirkt. Da nun nach §. 361 u. ff. der Druck $p\omega$ auf die obere Seite durch den Theil $p(\omega+d\omega)$ des Drucks auf die untere Seite aufgehoben wird; so wirkt auf die Schicht allein, der Richtung ihrer Bewegung entgegen, in Folge des Unterschieds zwischen dem auf beiden Seiten wirkenden Drucke, der Druck $dp.\omega$. Folglich ist die Gleichung der Bewegung der Schicht

$$\varrho\omega ds\left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \varrho g.\omega dz - dp.\omega,$$

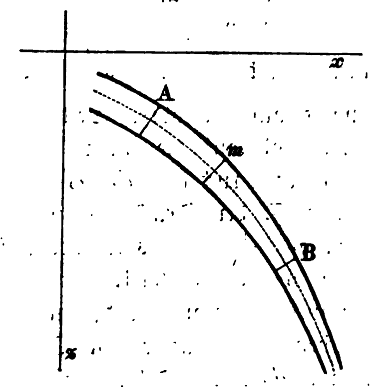
welche durch Division durch $\varrho\omega$ auf die Gleichung (A) sich reduciert, wenn man wiederum $\frac{ds}{dt} = u$ setzt.

In Wahrheit darf man diese Annahmen, die bekannt sind unter dem Namen Hypothese vom Parallelismus der Schichten, nur da machen, wo ein Fluidum vorliegt, welches in einer Röhre von sehr kleinem Querschnitte fließt, die nicht plötzlich sich erweitert. Wenn man dieselben auch in andern Fällen macht; so muß man stets bedenken, daß sie hier eigentlich nicht in der Natur begründet sind und deshalb nur mit Einschränkung und Vorsicht angewandt werden dürfen.

Bewegung eines schweren tropfbaren Fluidums in einer Röhre, deren Querschnitte sehr klein sind.

§. 416. Wenn, wie in §. 413, die in einer Röhre enthaltene Flüssigkeit AB (Fig. 43), auf welche die Schwerkraft wirkt, unserer Betrachtung vorliegt; so geht, bei der Annahme einer constanten Dichtigkeit wegen der Unausdehnsamkeit des Fluidums, die Gleichung (B) von §. 414 über in

Fig. 43.



$$\frac{d.\omega u}{ds} = 0.$$

Es geht aus ihr hervor, daß in einem beliebigen Augenblicke die Geschwindigkeit des Fluidums in der ganzen Ausdehnung der Röhre sich umgekehrt, wie die Schnittflächen verhält. Darnach genügt es den Werth der Geschwindigkeit in einem gegebenen Schnitte zu bestimmen um die Bewegung des Fluidums zu erkennen. Ist also U der Werth der Geschwindigkeit am Ende der Zeit t in dem Schnitte, dessen Fläche Ω ist; so

erhält man wegen der vorigen Gleichung

$$u = \frac{\Omega U}{\omega} \text{ und deshalb } \frac{du}{dt} = \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}. \qquad (C)$$

Substituiert man diese Werthe in die Gleichung (A) von §. 413, so geht dieselbe über in

$$\frac{dp}{\varrho} = g\,dz - \Omega\frac{dU}{dt}\frac{ds}{\omega} - \tfrac{1}{2}d\left(\frac{\Omega^2 U^2}{\omega^2}\right);$$

und wenn man in Beziehung auf die Veränderliche s integriert, so erhält man

$$p = \text{Const.} + \varrho g z - \varrho\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{ds}{\omega} - \frac{\varrho}{2}\frac{\Omega^2 U^2}{\omega^2}. \qquad (D)$$

§. 417. Man hat nun mehrere Fälle zu unterscheiden. Erstens möge die Flüssigkeit durch eine Röhre von unendlicher Länge fließen, in welcher sie nach einander verschiedene Theile einnimmt. Wir wollen nun bezeichnen am Ende der Zeit t durch

O und O' die Flächen der äußersten Schichten A und B;

z den Höhenunterschied der Mittelpunkte der Schichten A und m;

ζ den Höhenunterschied der Mittelpunkte der Schichten A und B;

S und S' die Länge der Axe der Röhre von einem festen Anfangspunkte bis zum obern, A, und dem untern Schnitt des Fluidums B;

m den Werth des Integrals $\int\frac{ds}{\omega}$ in dem Intervalle Am genommen;

M den Werth desselben Integrals in dem Intervalle AB genommen;

P und P' den (als in Beziehung auf die Zeit als constant angenommenen) Druck, welcher von außen auf die letzten Schichten A und B wirkt.

Nach der Gleichung (D) ist für die oberste Schicht A

$$P = \text{Const.} - \frac{\varrho}{2}\frac{\Omega^2 U^2}{O^2};$$

folglich ist für eine beliebige Schicht

$$p = P + \varrho g z - \varrho m \Omega \frac{dU}{dt} - \frac{\varrho U^2}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right); \qquad \text{(E)}$$

ebenso erhält man für die unterste Schnicht B

$$P' = P + \varrho g \zeta - \varrho M \Omega \frac{dU}{dt} - \frac{\varrho U^2}{2}\left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right). \qquad \text{(F)}$$

Da ferner die Geschwindigkeit in der obersten Schicht A sich ausdrücken läßt durch $\frac{dS}{dt}$, so ist nach Gleichung (C) $\frac{dS}{dt} = \frac{\Omega U}{O}$ oder

$$O dS = \Omega U dt \qquad \text{(G)}$$

In den Gleichungen (F) und (G) sind die Größen O, O', ζ und M als Functionen von S gegeben, wenn man die Gestalt der Röhre und das Volumen des Fluidums kennt. Diese Gleichungen geben demnach die Veränderlichen S und U als Function von t und bestimmen dadurch die Bewegung des Fluidums. Eliminiert man aus den Gleichungen (E) und (F) $\frac{dU}{dt}$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} p = P + \varrho g z - (P - P' + \varrho g \zeta)\frac{m}{M} \\ - \frac{\varrho U^2}{2}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2} - \left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{m}{M}\right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(H)}$$

Dies ist der Werth des Drucks in einer beliebigen Schicht m der Röhre.

§. 418. Zweitens möge das Fluidum durch das untere Ende der Röhre, in welchem die unterste Schicht B liegt, ausfließen, während die obere Schicht A mehr und mehr sich senkt. In diesem Falle lassen sich die Gleichungen (F), (G) und (H) des vorigen §. anwenden

um die Bewegung des Fluidums und den Druck zu bestimmen, wenn man in denselben O' und das Integral M als constant annimmt.

§. 419. Der dritte Fall, den wir untersuchen, ist das Umgekehrte des vorigen: es möge in der obersten Schicht der Röhre A die Flüßigkeit beständig erneuert werden, während die Schicht B sich mehr und mehr herabsenkt. Diese Erneuerung des Fluidums geschieht unserer Annahme nach so, daß neue Schichten hinzugefügt werden, welche dieselbe Schnelligkeit haben, wie die, deren Platz sie einnehmen. Dann ist in den Gleichungen von §. 417 der Flächeninhalt O der obern Schicht, so wie S constant. Statt der Gleichung (G) setzt man folgende

$$O'dS' = \Omega U dt$$

und in der Gleichung (F) muß man nach der Gestalt der Röhre die Größen O', ζ und M als Functionen von S' ausdrücken. Die Gleichung (F) mit der vorangehenden zusammengehalten giebt dann S' und U als Functionen von t.

§. 420. Im letzten Falle endlich nehmen wir an, daß das Fluidum beständig die Röhre füllt, indem es in dem Maße, wie es unten abfließt, oben beständig erneuert wird. Auch hier kann man die Gleichung (F) von §. 417 anwenden, wenn man die Größen O, O', ζ und M in derselben als Constanten ansieht; die Geschwindigkeit, welche allein zu bestimmen bleibt, ergiebt sich aus der Gleichung (G). Wenn man der größern Einfachheit wegen die Schicht Ω, auf welche sich die Geschwindigkeit U bezieht, in die Schicht, welche das untere Ende der Röhre bildet, hineinlegt; so geht die Gleichung (F) über in

$$P' = P + \varrho d\zeta - \varrho M \Omega \frac{dU}{dt} - \frac{\varrho U^2}{2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) \qquad \text{(I)}$$

und nach der Gleichung (H) erhält man für den Werth

des Drucks in einer beliebigen Schicht

$$\left.\begin{array}{l} p = P' + \varrho g z - (P - P' + \varrho g \zeta)\frac{m}{M} \\ \quad - \frac{\varrho U^2}{2}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2} - \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{m}{M}\right] \end{array}\right\} \quad \text{(K)}$$

Die Gleichung (I) in Beziehung auf dt aufgelöst giebt

$$dt = \frac{\varrho M \Omega dU}{P - P' + \varrho g \zeta - \frac{\varrho}{2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right).U^2};$$

und wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\frac{\frac{\varrho}{2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)}{P - P' + \varrho g \zeta} = \beta^2 \text{ und } \frac{P - P' + \varrho g \zeta}{\varrho M \Omega} = \gamma,$$

so wird

$$dt = \gamma \frac{dU}{1 - \beta^2 U^2}.$$

Integriert man und bestimmt die Constante so, daß $U = 0$, wenn $t = 0$; so giebt dies

$$t = \frac{\gamma}{2\beta} l \frac{1 + \beta U}{1 - \beta U}.$$

Diese Gleichung in Beziehung auf U aufgelöst giebt als Ausdruck für die Geschwindigkeit in der untersten Schicht der Röhre am Ende der Zeit t

$$U = \frac{1}{\beta} \frac{e^{\frac{2\beta}{\gamma}t} - 1}{e^{\frac{2\beta}{\gamma}t} + 1} \quad \text{(L)}$$

Der Werth des Drucks in einem beliebigen Schnitte ist dann durch die Formel (K) gegeben.

Man muß ferner bemerken, daß der durch den Ausdruck (L) gegebene Werth nach einer gewissen (gewöhnlich sehr kurzen und fast unmerklichen) Zeit sich nicht von einer

berechenbaren Größe unterscheidet, die den constanten Werth hat

$$U = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{P-P'}{\varrho g} + \zeta\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}} \qquad (M)$$

Dieser Werth wird genau genommen erst nach unendlich großer Zeit erreicht und würde unmittelbar durch die Gleichung (I) gegeben, wenn man in derselben $\frac{dU}{dt} = 0$ setzte. Setzt man den zuletzt gegebenen Werth für U in die Gleichung (K), so nimmt dieser Ausdruck für den Druck die einfachere Gestalt an:

$$p = P + \varrho g z - \frac{\varrho U^2}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right), \qquad (N)$$

der aus der Gleichung (E) sich ableiten läßt, wenn in derselben $\frac{dU}{dt} = 0$ gesetzt wird.

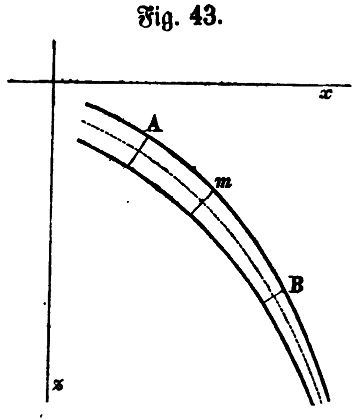
Aus diesen letzten Resultaten ergiebt sich, daß die Bewegung des Fluidums, wenn die Röhre beständig voll erhalten wird, nach wenigen Augenblicken als gleichförmig angesehen werden kann. Dabei giebt die Formel (M) die Geschwindigkeit in der untersten Schicht und die Formel (N) den Druck in einer beliebigen Schicht. In diesem Falle hängt also die Geschwindigkeit in der untersten Schicht nicht von der Gestalt der Röhre, sondern allein von dem Verhältniß der äußersten Schichten ab.

Man darf nicht übersehen, daß diese Resultate auf der Form des Integrals (L) beruhen; wir haben dabei nämlich angenommen, daß der Factor $1 - \frac{\Omega^2}{O^2}$ positiv oder die unterste Schicht der Röhre kleiner als die oberste ist; wenn dies nicht der Fall ist, so würde die Geschwindigkeit des Fluidums bis ins Unendliche zu wachsen streben.

Der auf die Röhre während der Bewegung des Fluidums wirkende Druck.

§. 421. Von derselben Annahme, wie in §. 416, ausgehend, daß nämlich ein unausdehnsames Fluidum AB (Fig. 43) unter Einwirkung der Schwerkraft in einer Röhre von unbestimmter Länge fließt, wollen wir den Druck bestimmen, welchen das Fluidum gegen die Röhre ausübt, d. h. die Kraft, welche man anwenden muß um diese Röhre in ihrer Lage zu erhalten. Diese Aufgabe läßt sich am einfachsten so lösen: da das in Bewegung begriffene Fluidum und die feste Wand der Röhre ein System bilden; so kann man dasselbe als frei im Raume annehmen, wenn man die Hindernisse, welche die Röhre in ihrer Lage erhalten, durch Kräfte ersetzt, welche dem Druck, den diese Hindernisse erleiden, gleich und entgegengesetzt sind. Wir wollen die partiellen Resultierenden dieses Drucks nach Richtung der x, der y und der z resp. durch E, F und G bezeichnen. Wenn man das Gewicht der Röhre nicht mit in Betracht zieht; so wirken auf das System Kräfte, welche dem Druck E, F und G gleich und entgegengesetzt sind, und die Einwirkung der Schwerkraft auf das Fluidum. Da nun die Bewegungen der Theile des Systems — hier die Bewegungen der Theile des Fluidums — stets derartig sein müssen, daß die diese Bewegungen hervorbringenden Kräfte den von außen auf das System wirkenden, wenn sie nach den entgegengesetzten

Fig. 43.



Richtungen genommen werden, das Gleichgewicht halten; so sieht man, daß der Ausdruck für diese Bedingung die Werthe des Drucks E, F und G bestimmt, sobald die Bewegung des Fluidums bekannt ist.

Wenn wir die in §. 413 u. ff. gewählten Bezeichnungen beibehalten, so bewegt sich die in m liegende Schicht am Ende der Zeit t nach Richtung der Röhrenaxe mit der Größe der Bewegung $\varrho\omega ds.u$; die Componierenden derselben nach Richtung der x, y und z sind resp.

$$\varrho\omega ds.u\frac{dx}{ds},\quad \varrho\omega ds.u\frac{dy}{ds},\quad \varrho\omega ds.u\frac{dz}{ds}.$$

Nach den oben genannten Bedingungen des Gleichgewichts haben wir also die Gleichungen

$$E = -\varrho\int\omega ds\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right),$$

$$F = -\varrho\int\omega ds\frac{d}{dt}\left(u\frac{dy}{ds}\right),$$

$$G = -\varrho\int\omega ds\frac{d}{dt}\left(u\frac{dz}{ds}\right) + \varrho g\int\omega ds.$$

Die durch $\int$ bezeichneten Integrale sind zwischen den äußersten Schichten A und B des Fluidums zu nehmen. Es ist aber

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right) = \left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{ds}\frac{du}{dt}\right)\frac{dx}{ds} + u\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right).\frac{ds}{dt};$$

oder weil $\frac{ds}{dt} = u$,

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right) = \frac{du}{dt}\frac{dx}{ds} + u\frac{d}{ds}\left(u\frac{dx}{ds}\right);$$

und nach der Gleichung (C) in §. 416 ist

$$u = \frac{\Omega U}{\omega},\quad \frac{du}{dt} = \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}.$$

Wenn man diese Werthe in die obige Gleichung setzt, erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{dU}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{\Omega^2 U^2}{\omega} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds}\right).$$

Ebenso findet man

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{\Omega^2 U^2}{\omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{dU}{dt}\frac{dz}{ds} + \frac{\Omega^2 U^2}{\omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds}\right).$$

Statt der vorangehenden erhält man dadurch folgende Ausdrücke

$$E = -\varrho\int\left[\Omega\frac{dU}{dt}dx + \Omega^2 U^2 d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds}\right)\right],$$

$$F = -\varrho\int\left[\Omega\frac{dU}{dt}dy + \Omega^2 U^2 d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds}\right)\right],$$

$$G = -\varrho\int\left[\Omega\frac{dU}{dt}dz + \Omega^2 U^2 d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds}\right)\right] + \varrho g\int\omega ds;$$

oder

$$E = \text{Const.} - \varrho\Omega\frac{dU}{dt}x - \varrho\Omega^2 U^2 . \frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds},$$

$$F = \text{Const.} - \varrho\Omega\frac{dU}{dt}y - \varrho\Omega^2 U^2 . \frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds},$$

$$G = \text{Const.} - \varrho\Omega\frac{dU}{dt}z - \varrho\Omega^2 U^2 . \frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds} + \varrho g\int\omega ds.$$

Die Constanten hat man so zu bestimmen, daß diese Ausdrücke für ihre der obersten Schicht A des Fluidums zukommenden Werthe $= 0$ werden und den Veränderlichen hat man dann die der untersten Schicht B zukommenden Werthe zu ertheilen.

Wenn man, wie es oben geschah, die Flächeninhalte der Schnitte A und B durch O und O' bezeichnet; ferner die Winkel, welche die Röhrenaxe resp. am Punkte A und am Punkte B mit den Axen der x, y und z bildet, durch λ, μ, ν und λ', μ', ν'; die Entfernungen der Punkte A und B der Axe, parallel mit den x, y und z gemessen,

durch ξ, η und ζ; endlich das Gewicht des in der Röhre enthaltenen Fluidums durch Π bezeichnet; so hat man endlich zum Schluß

$$E = -\varrho\Omega\frac{dU}{dt}\xi - \varrho\Omega^2U^2\left(\frac{\cos.\lambda'}{O'} - \frac{\cos.\lambda}{O}\right),$$

$$F = -\varrho\Omega\frac{dU}{dt}\eta - \varrho\Omega^2U^2\left(\frac{\cos.\mu'}{O'} - \frac{\cos.\mu}{O}\right),$$

$$G = -\varrho\Omega\frac{dU}{dt}\zeta - \varrho\Omega^2U^2\left(\frac{\cos.\nu'}{O'} - \frac{\cos.\nu}{O}\right) + \Pi,$$

als Ausdruck für die gesuchten Kräfte. Diese bemerkenswerthen Formeln zeigen, daß der nach irgend einer Richtung auf die Röhre wirkende Druck nur von der Lage der Enden der Flüssigkeitssäule, von der Richtung der Röhre und der Flächengröße des Querschnitts an diesen Enden und endlich von der Geschwindigkeit des Fluidums abhängt. Sie sind unabhängig von der Gestalt der Röhre zwischen jenen beiden Endpunkten.

§. 422. Die vorangehenden Formeln lassen sich leicht auf die vier in §. 417 u. ff. beleuchteten Fälle anwenden. Gewöhnlich variiert der von der Röhre erlittene Druck mit der Zeit. Jedoch in dem Falle von §. 420, wenn die Röhre beständig voll erhalten wird, darf man die Geschwindigkeit als constant ansehen (natürlich nicht in den ersten Augenblicken der Bewegung); schreibt man Ω statt O', so gehen jene Formeln über in

$$E = -\varrho\Omega^2U^2\left(\frac{\cos.\lambda'}{\Omega} - \frac{\cos.\lambda}{O}\right),$$

$$F = -\varrho\Omega^2U^2\left(\frac{\cos.\mu'}{\Omega} - \frac{\cos.\mu}{O}\right),$$

$$G = -\varrho\Omega^2U^2\left(\frac{\cos.\nu'}{\Omega} - \frac{\cos.\nu}{O}\right) + \Pi.$$

In diesen letzten Gleichungen ist

$$U = \sqrt{\frac{2g\zeta}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}.$$

Bewegung eines schweren tropfbaren Fluidums in einem beliebig gestalteten Gefäße.

§. 423. Um die Bewegung eines schweren Fluidums in einem Gefäße genau zu erkennen, müßte man eigentlich die in Cap. XXVIII. gegebenen Differentialgleichungen gebrauchen. Man kann jedoch in mehren Fällen aus den in §. 416 u. ff. gegebenen Sätzen Resultate ableiten, welche mit dem, was die Erfahrung und Beobachtung lehrt, übereinstimmen und deren Kenntniß von großer Wichtigkeit ist.

Folgende beide Fälle sind für die praktische Anwendung besonders wichtig: 1) daß ein mit der Flüssigkeit angefülltes Gefäß sich durch eine unten liegende Oeffnung leert, wie in §. 418; 2) daß das Gefäß immer voll erhalten wird, indem das durch die Oeffnung ausfließende Fluidum beständig oben wieder ersetzt wird, wie in §. 420 angenommen ist. Unsere Hauptaufgabe besteht darin die Menge Fluidum zu bestimmen, welche in einer gegebenen Zeit durch die Mündung ausfließt und diese Aufgabe hängt wieder von der Bestimmung der Geschwindigkeit des Fluidums an dieser Mündung ab.

In einem beliebig gestalteten Gefäße, dessen flüssiger Inhalt durch die Mündung NN ausfließt (Fig. 44), möge diese Oeffnung ausgeweitet sein, d. h. die obere Wand an der Mündung eine solche Gestalt haben, daß man allen von den Flüssigkeitstheilchen gebildeten Fäden, welche die Ebene NN durchschneiden, senkrechte Richtung gegen diese Ebene zuschreiben kann. Ist MM die Oberfläche des in dem Gefäße am Ende der Zeit t enthaltenen Fluidums; so

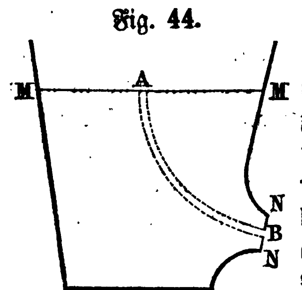


Fig. 44.

lehrt die Erfahrung, daß diese Oberfläche sich sehr wenig von einer Horizontalebene unterscheidet, zumal wenn die Mündung NN merklich kleiner ist, als die Oberfläche und dieser nicht zu nahe liegt. Denken wir uns nun einen unendlich kleinen Theil der Mündungsfläche, der in B liegt und den Flüssigkeitsfaden, welcher durch B hindurchgeht; so können wir stets diesen Faden bis zur Oberfläche des Fluidums bis A verlängert denken und ihm eine solche Gestalt geben, daß er alle Theilchen enthält, die im Laufe der Bewegung die Mündungsebene in B durchschneiden müssen. Kennte man nun die Gestalt aller Fädchen AB, so könnte man in einem jeden nach §. 416 und 417 den Werth der Geschwindigkeit am Ende der Zeit t berechnen; und wenn dieser für ein beliebiges Flächenelement der Mündung bekannt ist, so läßt sich auch die in bestimmter Zeit ausfließende Flüssigkeitsmenge berechnen. Es ist hier unumgänglich nothwendig die Gestalt der Flüssigkeitsfäden AB zu kennen, weil die Formel (F) in §. 416, welche wir benutzen müssen, das Integral $M = \int_S^{S'} \frac{ds}{\omega}$ enthält, dessen Werth von jener Gestalt abhängt. Daraus folgt, daß man die Bewegung eines Fluidums in einem durch eine untere Oeffnung sich mehr und mehr leerenden Gefäße nicht mit hinreichender Genauigkeit bestimmen kann.

§. 424. Aber wenn die Oberfläche des Fluidums in dem Gefäße beständig in der Höhe MM erhalten wird, indem nämlich die sich senkenden Flüssigkeitstheile beständig durch andre ersetzt werden, deren Geschwindigkeit der der

erstern gleich ist; so lassen sich auf die verschiedenen Fäden die in §. 420 gegebenen Resultate anwenden. Es ist also nach sehr kurzer Zeit die Bewegung des Fluidums in allen Theilen constant, und wenn man annimmt, daß der von außen auf den Schnitt MM wirkende Druck dem auf NN wirkenden gleich ist; so ist nach der Formel (M) die Geschwindigkeit des Fluidums in dem Punkte B der Mündung

$$U = \sqrt{\frac{2g\zeta}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}.$$

ζ ist die verticale Entfernung des Punktes A von der Oberfläche MM des Fluidums oder die auf dem Punkte B lastende Masse des Fluidums; das Verhältniß $\frac{\Omega}{O}$ zwischen den Flächen der äußersten Schnitte B und A des Fadens AB kann nicht merklich von dem Verhältniß zwischen den Flächengrößen der Schnitte NN und MM des Gefäßes verschieden sein. Man kann also beim beständigen Abfluß eines stets voll erhaltenen Gefäßes mit hinreichender Genauigkeit die Geschwindigkeit des Fluidums in den verschiedenen Punkten der Mündungsebene berechnen und darnach das Volumen der Flüssigkeit bestimmen, das in der Zeiteinheit ausfließt.

§. 425. Da nach der Formel (N) in §. 420 die Schicht ω des Fadens AB in den verschiedenen Punkten bekannt sein muß, wenn man den in den verschiedenen Theilen des Gefäßes wirkenden Druck bestimmen will, während die Gestalt dieser Fäden unbekannt bleibt; so läßt sich der Druck nicht völlig genau bestimmen. Wenn man auf das der Untersuchung vorliegende Gefäß die Formel (N) anwendet, die wirklich nur auf eine Röhre von sehr kleinem Querschnitte paßt; so schätzt man ihn dadurch nur annähernd auf höchst unvollkommene Weise ab.

Da jene Formel eigentlich nur auf ein Flüssigkeitsfädchen angewandt werden kann, das in einer sehr engen Röhre fließt; so müßte man, wenn man eine Vereinigung solcher Fäden betrachtet, auf die Centrifugalkraft der Massetheilchen Rücksicht nehmen, welche nothwendigerweise den Druck merklich vergrößert, indem hier deren Einwirkungen von einem Faden auf den andern übertragen werden. Die Wirkung der Centrifugalkraft verändert nicht die Bewegung des Fluidums in jedem Faden, weil sie immer senkrecht gegen die Richtung der Axe des Fadens wirkt, aber sie vermehrt den Druck in dem Theile des Gefäßes, dem die Flüssigkeitsfäden ihre convexe Seite zukehren. Man darf darum aus der Bewegung jedes besonders genommenen Fadens auf die Bewegung des Fluidums schließen, nicht aber auf den ausgeübten Druck.

§. 426. Nach den Formeln in §. 422 kann man den während der Bewegung des Fluidums auf das Gefäß wirkenden Druck bestimmen. Die durch λ und μ bezeichneten Winkel sind für alle Fälle rechte, der Winkel $\nu = 0$; auch der Winkel λ' ist ein rechter, wenn man die Ebene der yz senkrecht gegen die Ebene NN der Mündung legt und der durch ε bezeichnete Druck wird $= 0$. Die Ausdrücke für den horizontal und vertical auf das Gefäße wirkenden Druck sind demnach einfach

$$F = -\varrho \Omega U^2 \cos.\mu',$$

$$G = -\varrho \Omega U^2 \left(\frac{\cos.\nu'}{\Omega} - \frac{1}{o}\right) + \Pi;$$

dieselben reducieren sich auf

$$F = -\varrho \Omega U^2,$$

$$G = -\varrho \frac{\Omega U^2}{o} + \Pi,$$

wenn die Ebene der Mündung vertical ist. Statt der

Größen O und Ω rechnet man in ihnen die Flächen der Schnitte MM und NN und statt U^2 das Mittel aus den Quadraten der Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsfäden, welche die Ebene NN durchschneiden, nachdem diese Geschwindigkeiten nach §. 424 berechnet sind.

Da bei diesen Ausdrücken auf die Centrifugalkraft Rücksicht genommen ist; so gelten sie ebenso wohl für eine vereinigte Menge von Flüssigkeitsfäden, als für jeden einzelnen.

Fall, daß die Mündung, durch welche das Fluidum ausfließt, sehr klein ist.

§. 427. Wenn gegen alle Querschnitte des Gefäßes die Mündung sehr klein ist; so darf man den Querschnitt am Ende B des Flüssigkeitsfadens AB (vergl. §. 423) gleichfalls gegen alle übrigen Schnitte desselben als sehr klein ansehen. Wenn uns, wie in §. 418, eine Röhre zur Betrachtung vorliegt, welche sich durch ihr unterstes Ende leert; so müssen wir zur Bestimmung der Bewegung des Fluidums die Gleichung (F) in §. 417 anwenden, in der man, da der unterste Schnitt O' constant ist, der größern Einfachheit halber Ω statt O' schreiben kann: dann ist U die Geschwindigkeit dieses Schnitts. Da aber Ω gegen alle übrigen Schnitte der Röhre sehr klein sein soll; so darf man den Ausdruck $\varrho M\Omega\frac{dU}{dt}$ in der Gleichung (F) vernachlässigen, ebenso noch weit eher den Ausdruck $\varrho\frac{U^2}{2}\frac{\Omega^2}{O^2}$. Darnach erhält man statt jener Gleichung

$$U=\sqrt{2g\left(\frac{P-P'}{\varrho g}+\zeta\right)}.$$

Es hängt also die Geschwindigkeit an dem Ende der Röhre, durch welches das Fluidum ausfließt, nur von dem äußern

Druck und von dem Höhenunterschiede der beiden Enden der Flüssigkeitssäule ab. Vermittels dieses Ausdrucks für U erhält man aus der Gleichung (G) in §. 417 unmittelbar ein Verhältniß zwischen S und t und dadurch das Gesetz der Bewegung im obern Ende der Flüssigkeitssäule. Die den Werth des Drucks ergebende Gleichung (E) reduciert sich hier auf

$$p = P + \varrho g z;$$

folglich ist der Druck nicht von dem verschieden, der unter denselben Verhältnissen auf die Flüssigkeit wirkt, wenn sie nicht in Bewegung ist.

Sollen nun nach den in §. 423 gegeben Erklärungen diese Resultate auf den Fall angewandt werden, daß das Fluidum aus einem beliebig gestalteten Gefäße durch eine sehr kleine Mündung ausfließt; so darf man die voranstehenden Ausdrücke für die Geschwindigkeit an der Mündung und für den im Innern des Gefäßes wirkenden Druck gleichfalls anwenden, da die Ausdrücke, deren Bestimmung von der Gestaltung der Flüssigkeitsfäden abhängt, wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Mündung verschwinden. Wenn demnach ein tropfbares Fluidum aus einem Gefäße durch eine sehr kleine Mündung ausfließt; so ist, falls man annimmt, daß der äußere Druck, der auf die Oberfläche des Fluidums wirkt, derselbe ist, wie der auf die Mündung wirkende, 1) die Geschwindigkeit an der Mündung beständig von der veränderlichen Höhe der Oberfläche des Fluidums über dem Mittelpunkte der Mündung abhängig; 2) der Druck im Innern des Gefäßes derselbe, als wenn das Fluidum sich nicht bewegte.

Mit mehr Grund noch kann man die vorangehenden Resultate auf den Fall anwenden; daß das Gefäß beständig voll erhalten wird. Da die Größe β in §. 420 sehr groß

ist, so erhält die Geschwindigkeit fast augenblicklich den constanten Werth (M) in demselben §., der sich reduciert auf

$$U = \sqrt{2g\left(\frac{P-P'}{\varrho g} + \zeta\right)};$$

oder auf

$$U = \sqrt{2g\zeta},$$

wenn der von außen auf die äußersten Schichten wirkende Druck derselbe ist.

Wenn man Ω als die Mündungsfläche nimmt, so geben die Ausdrücke in §. 426 genau den auf das Gefäß geübten Druck.

Der Ausdruck $F = -\varrho\Omega U^2$ für den horizontal auf das Gefäß wirkenden Druck, der durch das Ausfließen des Fluidums aus einer Oeffnung mit verticaler Ebene hervorgebracht wird, reduciert sich auf $F = -\varrho g\Omega . 2\zeta$, wenn man statt U den obigen Werth $\sqrt{2g\zeta}$ hineinsetzt. Das Gefäß wird also nach der Richtung, welche der der Bewegung des Fluidums entgegengesetzt ist, durch einen Druck zurückgestoßen, der dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule gleich ist, deren Grundfläche die Mündung, deren Höhe das Doppelte der auf dem Mittelpunkt dieser Mündung lastenden Masse ist. Hieraus erklären sich manche bemerkenswerthe Erscheinungen.

Fall, daß die Mündung nicht ausgeweitet ist. Zusammenziehung des Strahls der Flüssigkeit.

§. 428. Was wir unter einer **ausgeweiteten** Mündung verstehen, haben wir in §. 423 erklärt. Die in diesem §. u. den ff. aufgestellten Sätze gelten nur in den Fällen, wo die Flüssigkeit durch eine solche Mündung ausströmt. Man kann hier das Volumen des Fluidums berechnen, welches in einer gegebenen Zeit ausgeflossen ist,

weil man die Geschwindigkeit des Fluidums in den verschiedenen Theilen der Mündungsebene kennt und weil das in der Zeiteinheit ausfließende Volumen das Product des Flächeninhalts jedes Theils der Mündung in die zugehörige Geschwindigkeit ist, da die Flüssigkeitsfäden diese Ebene rechtwinklicht schneiden. Die nach diesen Sätzen gemachten Berechnungen stimmen mit den Beobachtungen überein; nur in den Fällen, wo die Querschnitte des Gefäßes gegen seine Länge sehr klein sind, wie in Wasserleitungsröhren, ist dies nicht ganz der Fall, weil die Wirkungen der Adhäsionskräfte zwischen den Theilen der Flüssigkeit und den Wänden alsdann sehr bemerkbar werden und ohne große Fehler nicht vernachlässigt werden dürfen.

Wenn eine Mündung nicht ausgeweitet ist, so durchschneiden die Flüssigkeitsfäden nicht mehr alle die Mündungsebene rechtwinklicht, und dies ist der einzige Unterschied, der zwischen diesem und dem vorigen Falle besteht. Freilich haben die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen in dem Augenblicke, wo sie durch die Mündungsebene hindurchgehen, gleichfalls die nach den obigen Regeln bestimmbaren Werthe; man kann jedoch nicht daraus allein das Volumen des Fluidums berechnen, welches in einer gegebenen Zeit ausfließt. Denn das, was auf jeden der Fäden kommt, muß durch das Product der Geschwindigkeit und des Flächeninhalts des zugehörigen Theils der Mündung, welcher auf einer senkrecht auf der Richtung des Fadens stehenden Ebene projiciert ist, berechnet werden und die vorangehenden Sätze bestimmen diese Richtung gewöhnlich nicht.

Die schräge Richtung eines Theils der Fäden und besonders derjenigen, welche dem Umfange der Mündung am nächsten sind, bringt die Zusammenziehung des Flüssigkeitsstrahls hervor. Wenn ein Fluidum aus

einer ausgeweiteten Mündung herausströmt; so bildet der Strahl beim Hervorgehen aus der Mündung einen senkrechten Cylinder oder ein senkrechtes Prisma, dessen Basis die Mündung selbst, dessen Axe auf der Ebene dieser Mündung senkrecht ist. Aber wenn die Oeffnung nicht ausgeweitet ist, die Mündung nur einfach in einer Oeffnung besteht, die in eine ebene und dünne Wand gemacht ist, wie *NN* in Fig. 45; so zieht sich der Strahl zusammen, sobald er aus der Mündung heraustritt, bevor er eine cylindrische oder prismatische Gestalt annimmt, und der Schnitt *nn* desselben ist dann merklich kleiner als die Fläche *NN* der Mündung. Da übrigens angenommen werden darf, daß die Flüssigkeitsfäden die zusammengezogene Schicht *nn* rechtwinklicht durchschneiden; so ist dadurch die Möglichkeit gegeben die oben entwickelten Resultate, welche eigenlich nur für eine ausgeweitete Mündung gelten, auch hier anzuwenden, indem man den Theil des Strahls *NnnN* als eine Verlängerung des Gefäßes ansieht; freilich sind wir trotzdem nicht in den Stand gesetzt die Menge des Fluidums, die in gegebener Zeit ausgeflossen ist zu berechnen, weil man nicht von vornherein das Verhältniß zwischen den Schichten *NN* und *nn* angeben kann, von welchem wir nur das wissen, daß es stets zwischen den Zahlen 1 und 2 liegt.

Fig. 45.

Aus allem diesem folgt, daß mit Sicherheit die aus einem Gefäß ausfließende Flüssigkeitsmenge nur dann berechnet werden kann, wenn die Mündung ausgeweitet ist; in allen andern Fällen muß man die Regeln erst aus speciellen Beobachtungen herleiten. So weiß man aus

Erfahrung, daß bei einer offnen Mündung in einer ebenen und dünnen Wand der Schnitt nn zu dem Schnitte NN sich ungefähr wie 0,62 zu 1 verhält. Dies Resultat bleibt dasselbe, wenn man innerhalb ziemlich weiter Grenzen die Gestalt der Oeffnung und die absoluten Dimensionen derselben sich ändern läßt. Man kann demnach in diesem Falle, wenn die Mündung gegen die Schnitte des Gefäßes sehr klein ist, das in der Zeiteinheit ausgeflossene Fluidum durch die Formel

$$0{,}62\,.\,\Omega\sqrt{2g\zeta}$$

berechnen, wo Ω den Flächeninhalt der Mündung, ζ die über dem Centrum der Mündung lastende Masse der Flüssigkeit bezeichnet.

§. 429. Man darf die oben erhaltenen Resultate nur da anwenden, wo die Größe der Schichten im Innern des Gefäßes allmählich abnimmt, besonders also wo keine plötzliche Verengung des Gefäßes oder keine unvermittelte Veränderung in der Richtung der Bewegung des Fluidums statt hat. In solchen Fällen, wie diese letztgenannten sind, ist es weit schwerer die Bewegung des Fluidums zu bestimmen und erfordert besondere Untersuchungen.

Bewegung eines luftförmigen Fluidums in einem Gefäße.

§. 430. Die Gleichungen (A) und (B) in §. 413 drücken allgemein die Bedingungen der Bewegung eines Fluidums aus, welches in einer Röhre von sehr kleinem Querschnitte fließt. Ist dies Fluidum luftförmig und die Temperatur desselben gleichförmig und constant, so ist $p = k\varrho$: hiernach verwandeln sich jene Gleichungen in folgende

$$k\frac{dp}{p} = g\,dz - \frac{du}{dt}ds - \tfrac{1}{2}\,d\,.\,u^2,$$

$$\omega \frac{dp}{dt} + \frac{d.p\omega u}{ds} = 0;$$

man darf dabei nicht vergessen, daß die Differentiale dp, dz und du^2 in der ersten so genommen sind, daß man allein s sich verändern läßt.

§. 431. Der größern Einfachheit wegen wollen wir hier allein den Fall in Betracht ziehen, welcher dem Falle in §. 420 analog ist, daß nämlich die Röhre, durch welche das Fluidum ausströmt, in einen Behälter oder ein Gasometer hineinleitet, in welchem der Druck den constanten Werth P behält, während das andere Ende der Röhre in einem Mittel liegt, das gleichfalls einen constanten Werth P' auf die Röhrenöffnung ausübt, der kleiner, als P ist. In diesem Falle gelangt die Bewegung des Fluidums fast augenblicklich zu einem dauernden Zustande, den man aus den obigen Gleichungen erkennt, wenn man in denselben $\frac{du}{dt} = 0$ und $\frac{dp}{dt} = 0$ setzt. Man erhält dadurch

$$k \frac{dp}{p} = g dz - \tfrac{1}{2} d.u^2 \text{ und } \frac{d.p\omega u}{ds} = 0.$$

Man erhält durch Integration der ersten

$$k.lp = \text{Const.} + gz - \tfrac{1}{2}u^2.$$

Bezeichnet man, wie in den vorigen §§., durch Ω den Flächeninhalt des letzten Schnitts der Röhre und durch U die Geschwindigkeit in dieser Schicht; so hat man durchgängig wegen der letztern Gleichung $p\omega u = P'\Omega U$. Wenn man ferner durch O den Flächeninhalt des ersten Schnitts der Röhre bezeichnet, so giebt die obige Gleichung für diese Schicht

$$k.lP = \text{Const.} - \frac{U^2}{2} \frac{P'^2 \Omega^2}{P^2 O^2}.$$

Darnach ist für einen beliebigen Schnitt

$$k \, . \, l \frac{p}{P} = gz - \frac{U^2}{2}\left(\frac{P'^2 \Omega^2}{p^2 \omega^2} - \frac{P'^2 \Omega^2}{P^2 O^2}\right);$$

also für den letzten Schnitt

$$k \, . \, l \frac{P'}{P} = g\zeta - \frac{U^2}{2}\left(1 - \frac{P'^2 \Omega^2}{P^2 O^2}\right).$$

Folglich fließt das Fluidum aus mit der Geschwindigkeit

$$U = \sqrt{\frac{2k \, . \, l \frac{P}{P'} + 2g\zeta}{1 - \frac{P'^2 \Omega^2}{P^2 O^2}}}.$$

Wenn die Geschwindigkeit U bestimmt ist, so ergiebt sich der Werth des Drucks p in einer beliebigen Schicht ω aus der vorangehenden Gleichung.

§. 432. In den meisten Fällen ist der Ausdruck $2g\zeta$ gegen den Ausdruck $2k \, . \, l \frac{P}{P'}$ sehr klein und kann vernachlässigt werden. Nimmt man ferner das Verhältniß $\frac{\Omega}{O}$ der letzten Schnitte der Röhre als sehr klein an; so reduciert sich der obige Ausdruck für U auf

$$U = \sqrt{2k \, . \, l \frac{P}{P'}};$$

den Druck p findet man aus der Gleichung

$$\frac{l \frac{P}{p}}{l \frac{P}{P'}} = \frac{\frac{P^2 O^2}{p^2 \omega^2} - 1}{\frac{P'^2 \Omega^2}{P^2 O^2}}.$$

Den obigen Ausdruck für U kann man anwenden um das Volumen elastischer Flüssigkeit zu berechnen, das in einer gegebenen Zeit unter einem constanten Druck P' durch eine sehr kleine ausgeweitete Mündung ausströmt. Wenn die Mündung nicht ausgeweitet ist; so muß man ebenso wohl als wenn es sich um eine tropfbare Flüssigkeit handelte, auf die in §. 428 gemachten Bemerkungen achten.

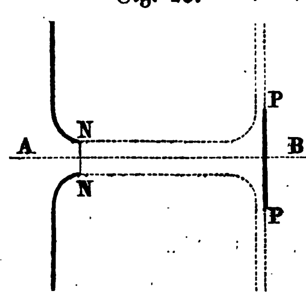
XXX. Vom Widerstande der Fluida.

§. 433. Unter dem Ausdruck Widerstand der Fluida versteht man gewöhnlich den Druck, welchen man anwenden muß um einen Körper unbeweglich zu erhalten, der von dem Stoße einer Flüssigkeit getroffen wird, oder um einen Körper in Bewegung zu setzen, welcher in ein Fluidum eingetaucht ist. Die genaue Kenntniß dieses Drucks ist von großer Wichtigkeit bei mechanischen Anwendungen. Wir wollen die beiden Hauptfälle besonders behandeln: 1) daß ein aus der Mündung eines Gefäßes hervorströmender Strahl auf einen Körper stößt, dessen Dimensionen größer, als die des Strahls sind; und 2) daß ein Körper in den Lauf eines Fluidums von unendlicher Ausdehnung eingetaucht ist.

Vom Stoße eines Flüssigkeitsstrahls.

§. 434. Wir betrachten zunächst einen Strahl tropfbarer Flüssigkeit, der in horizontaler Richtung aus einer ausgeweiteten Mündung *NN* (Fig. 46) hervorströmend gegen die Ebene *PP* stößt, welche senkrecht gegen die Axe des Strahls, *AB*, liegt. Beim Heraustreten aus der Mündung sind alle Flüssigkeitsfäden der Axe parallel und nehmen, wenn die Ebene *PP* groß genug ist, sobald sie im Umfange derselben anlangen, solche Richtungen an, die der Ebene parallel, folglich gegen *AB* senkrecht sind. Wenn wir uns einen dieser Fäden in dem Zwischenraume *NP*, also zwischen der Ebene

Fig. 46.



NN und dem Umfange der Ebene PP denken; so kann man annehmen, daß er in einer Röhre von sehr kleinem Querschnitte fließt, und die in §. 421 und 422 gegebenen Formeln drücken alsdann den Druck aus, der gegen diese Röhre nach gegebenen Richtungen wirkt, oder die Kräfte, welche man auf sie müßte wirken lassen um sie unbeweglich zu erhalten. Augenscheinlich aber wird der Druck, welcher aus der Bewegung des Fluidums in jedem Faden hervorgeht, von einem Faden auf den andern übertragen und wenn man für jeden Faden den aus der Bewegung des Fluidums nach Richtung der Linie AB resultierenden Druck nimmt, so ist die Summe desselben der gegen die Ebene PP wirkende Druck. Nimmt man also an, daß die Axe der y der Linie AB parallel ist, und daß die Geschwindigkeit des Fluidums in Beziehung auf die Zeit constant ist, und beachtet man, daß für einen beliebigen Faden der Winkel $\mu = 0$ und der Winkel μ' ein rechter ist; so ist nach §. 421 der Druck, welcher der Linie AB parallel durch die Bewegung des Fluidums in diesem Faden hervorgebracht wird, $F = \frac{\varrho\Omega^2 U^2}{O}$. Setzt man in diesem Ausdrucke $O = \Omega$; so ist U die Geschwindigkeit in der Schicht NN, d. h. an dem in NN liegenden Ende des Fadens und $F = \varrho\Omega U^2$. Und da dies von allen den Strahl bildenden Fäden gilt; so schließt man, daß der gegen die Ebene PP durch den Stoß des Flüssigkeitsstrahls ausgeübte Druck durch $\varrho\Omega U^2$ ausgedrückt wird, wenn man durch Ω den Flächeninhalt der Mündung NN, durch U die Geschwindigkeit an dieser Mündung bezeichnet. Dies Resultat stimmt mit den Beobachtungen überein, wenn der Stoß unter den genannten Bedingungen stattfindet, daß nämlich die Mündung ausgeweitet ist und daß die getroffene Ebene groß genug ist um allen Flüssigkeitsfäden zu gestatten dieser

Ebene parallele Richtungen anzunehmen, sobald sie diese erreichen.

Wenn die Mündung NN nicht ausgeweitet ist, so daß der Strahl sich zusammenzieht, wenn er aus der Oeffnung herausgetreten ist (vergl. §. 428); so kann man auch die obige Formel gebrauchen, wenn man Ω als den Flächeninhalt des Schnitts des Strahls nimmt da, wo er deutlich cylindrisch geworden ist und U als die Geschwindigkeit des Fluidums in diesem Schnitte.

Wenn man das oben gegebene Resultat mit dem am Ende des §. 417 gegebenen zusammenstellt; so sieht man, daß der Stoß des Fluidums gegen die Ebene PP denselben Druck ausübt, den dasselbe nach der entgegengesetzten Richtung gegen das es enthaltende Gefäß ausübt. Das Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts beweist, daß der Druck auf beiden Seiten nothwendig derselbe sein muß.

§. 435. Wenn der Strahl vertical von oben nach unten ausfließt, so ist der Ausdruck für den auf die Horizontalebene PP wirkenden Druck, gegen welche der Stoß gerichtet ist, $\varrho \Omega U^2 + \Pi$; Π ist das Gewicht des in dem Volumen $NPPN$ enthaltenen Fluidums, welches ohne vollständige Kenntniß der Bewegung des Fluidums nicht bestimmt werden kann. Im umgekehrten Falle, daß der Strahl von unten nach oben hervorströmt, ist der Druck $= \varrho \Omega U^2 - \Pi$.

§. 436. Wenn ein horizontaler Stoß auf ein convexes Conoïd*) stößt, dessen Axe mit der des Strahls zusammenfällt (Fig. 47); so bilden alle Flüssigkeitsfäden in P

*) Unter Conoïd versteht man hier einen Körper, der einem abgestumpften geraden Kegel gleicht und am obern Ende in einen Kugelabschnitt zuläuft.

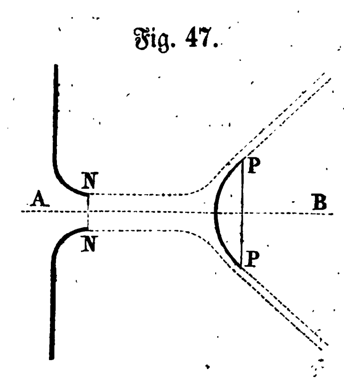


Fig. 47.

mit dieser Axe einen und denselben Winkel, den wir durch ψ bezeichnen wollen. Wenn man auf diesen Fall, wie es §. 434 geschehen ist, den in §. 421 entwickelten Ausdruck für F anwendet; so muß man $\mu = 0$ und $\mu' = \psi$ setzen und erhält dadurch $F = \varrho \Omega^2 U^2 \left(\frac{1}{O} - \frac{\cos.\psi}{O'}\right)$; oder, wenn man wieder $\Omega = O$ setzt, giebt dies $F = \varrho \Omega U^2 \left(1 - \frac{\Omega}{O'} \cos.\psi\right)$. Da dies von allen Fäden gilt; so ist der Werth des gegen das Conoïd geübten Drucks

$$\varrho \Omega U^2 \left(1 - \frac{\Omega}{O'} \cos.\psi\right),$$

worin wiederum Ω den Flächeninhalt der Mündung NN, U die Geschwindigkeit des Fluidums an dieser Mündung bezeichnet. In dieser Formel bleibt jedoch das Verhältniß $\frac{\Omega}{O'}$ der Flächengrößen der Schnitte jedes Fadens in N und P unbekannt. Uebrigens kann man ohne großen Fehler annehmen, daß die meisten Flüssigkeitsfäden solche Gestalt annehmen, daß die absolute Geschwindigkeit der Massetheilchen in N und P nicht merklich verschieden ist; da folglich auch die Querschnitte dieser Fäden gleichfalls nach dieser Annahme sich nicht merklich ändern, so ist $\frac{\Omega}{O'} = 1$ und darnach darf man den auf das Conoïd wirkenden Druck ansehen als gegeben durch den Ausdruck

$$\varrho \Omega U^2 (1 - \cos.\psi).$$

Aehnliche Betrachtung würde uns dahin führen, den auf die concave Seite des Conoïds wirkenden Druck nach der vorigen Formel, in der allein das Vorzeichen des Cosinus geändert werden muß, zu bestimmen; derselbe ist also

$$\varrho \Omega U^2 (1 + \cos.\psi).$$

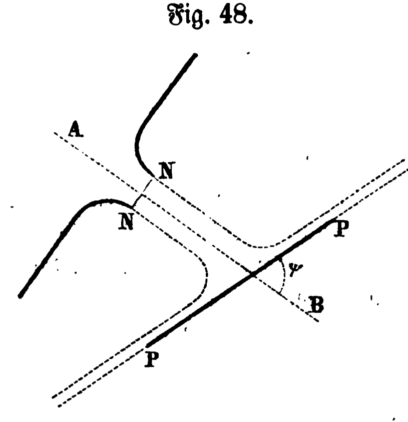
Diese Formel giebt als Werth desselben Drucks

$$2.\varrho \Omega U^2 \quad \text{oder} \quad \varrho g \Omega . 4\zeta,$$

wo ζ die zu der Geschwindigkeit U gehörige Höhe ist, wenn das Conoïd eine solche Gestalt hat, daß die Flüssigkeitsfäden nach der der Richtung des Strahls entgegengesetzten Richtung zurückprallen. Diese Resultate stimmen beinah ganz genau mit dem überein, was die Beobachtungen der Erscheinung, wie sie besonders genau Morosi angestellt hat, ergeben.

§. 437. Endlich möge der Stoß eines Strahls, dessen Axe eine beliebige Richtung hat (Fig. 48), auf eine Ebene PP von gleichfalls willkührlicher Richtung treffen, wobei natürlich die Ebene immer noch als groß genug angenommen wird, daß die Flüssigkeitsfäden mit ihr parallele Richtung annehmen können. Bildet die Ebene PP mit der Axe AB den Winkel ψ, ferner das Loth auf dieser Ebene mit der Verticallinie den Winkel α; bezeichnen wir außerdem durch Π das Gewicht des in dem Raume $NPPN$ enthaltenen Fluidums und durch F die Kraft, die senkrecht auf die

Fig. 48.



Ebene wirken muß um sie in ihrer Lage zu erhalten und um dem Stoße des Fluidums zu widerstehen: so bestimmt man die Kraft F, wenn man beachtet, daß in dem Systeme, welches die Ebene PP und das in $NPPN$ enthaltene Fluidum bilden, die in dem Zeitraume dt gewonnenen Größen der Bewegung, welche die auf das System wirkenden Kräfte nach entgegengesetzter Richtung genommen diesem ertheilen, sich das Gleichgewicht halten müssen. Wenn wir die gewonnenen und ertheilten Bewegungsgrößen senkrecht gegen die Ebene PP zerlegen; so finden wir 1) daß während des Augenblicks dt in NN die Flüssigkeitsmasse $\varrho\Omega Udt$ in das System eintritt, und die Größe der Bewegung derselben senkrecht gegen die Ebene PP zerlegt $= \varrho\Omega Udt.U\sin.\psi$ ist; 2) daß während desselben Augenblicks in PP eine Fluidumsmasse austritt, deren Bewegungsgröße senkrecht gegen die Ebene zerlegt $= 0$ ist. Die nach dieser Richtung gewonnene Größe der Bewegung ist also $-\varrho\Omega Udt.U\sin.\psi$. Auf der andern Seite finden wir, daß die Einwirkung der Schwerkraft auf das in $NPPN$ enthaltene Fluidum und der Druck F dem System die Bewegungsgröße $\Pi\cos.\alpha.dt - Fdt$ ertheilen und nach dem oben erwähnten Satze erhalten wir dadurch die Gleichung

$$-\varrho\Omega Udt.U\sin.\psi - \Pi\cos.\alpha dt + Fdt = 0;$$

also

$$F = \Pi\cos.\alpha + \varrho\Omega U^2\sin.\psi.$$

Wenn die Ebene vertical ist, so ist einfach

$$F = \varrho\Omega U^2\sin.\psi.$$

Durch mehrfache Experimente, wie der Doctor Vince einige gemacht hat, hat man Resultate erzielt, die mit dem obigen übereinstimmen.

Vom Widerstande der Fluida gegen einen in ein unendliches Fluidum eingetauchten Körper.

§. 438. Es ist unsere Aufgabe hier den Druck zu bestimmen, welchen ein Körper, der in einem Flüssigkeitsstrome von horizontaler Richtung und gleichförmiger Geschwindigkeit unbewegt erhalten wird, nach Richtung des Stroms durch Wirkung des Stoßes der Flüssigkeit zu tragen hat; den Druck also, welcher den Körper nach dieser Richtung zu verschieben strebt. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe, welche erfordert genau alle Modificationen zu bestimmen, welche die Bewegung des Fluidums erleidet, wenn dasselbe den Körper trifft, läßt sich nicht geben; daher kann man darüber nur einige Bemerkungen machen und verschiedene Resultate, die sich durch besondere Experimente ergeben haben, hinzufügen.

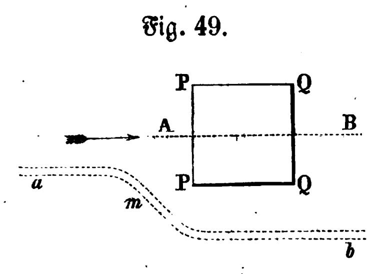
Denken wir den Körper in eine cylindrische Fläche eingehüllt, deren Kanten der Richtung des Stromes parallel sind. Die Linie, in der diese Fläche die Oberfläche des Körpers berührt, theilt die letztere in zwei Theile; den Theil des Körpers, auf welche der Stoß des Stromes wirkt, wollen wir Vorderseite, den entgegengesetzten Theil Hinterseite nennen. Um den Druck zu bestimmen, welcher nach Richtung des Stroms auf den Körper wirkt, muß man offenbar nach der Richtung desselben den Druck, welchen alle Theile der Vorderseite erleiden, zerlegen und die Summe dieser Componierenden nehmen; ebenso muß man bei der Hinterseite verfahren. Nach §. 382 sind diese beiden Summen stets gleich und direct einander entgegengesetzt, wenn das Fluidum keine Bewegung hat. Anders verhält es sich, wenn das Fluidum sich bewegt; alsdann ist die Summe der Componierenden für die Vorderseite größer als die für die Hinterseite und der Ueberschuß der ersten Summe über

die zweite ist der Druck, den der Körper erleidet oder der Widerstand, welchen er der Bewegung des Fluidums entgegensetzt. Darnach führt die Aufgabe darauf, daß man die Oberfläche des Körpers wie eine feste Wand ansieht, gegen welche das in Bewegung befindliche Fluidum drängt; und es muß demnach der Druck berechnet werden, den das Fluidum gegen die verschiedenen Theile dieser Wand ausübt. Aber um diesen Druck berechnen zu können, muß man die Bewegung des Fluidums vollständig kennen, d. h. man muß die Differentialgleichungen integrieren können, welche die Bedingungen dieser Bewegung angeben: dies ist gewöhnlich nach den bekannten analytischen Methoden unausführbar, selbst wenn man dem Körper, gegen welchen der Stoß des Fluidums wirkt, die einfachste Gestalt beilegt.

§. 439. Will man übrigens sich eine Idee von der Art dieses Widerstandes machen, so läßt sich folgendes darüber bemerken.

Der Stoß des Stromes wirke auf einen beliebig gestalteten Körper (Fig. 49), dessen Vorderseite *PP*, dessen Hinterseite *QQ* ist. Der Körper verändert dann die Bewegung des Fluidums, so daß die Fäden, welche sich geradlinig und der Linie *AB* parallel bewegen müßten, Curven beschreiben, wie z. B. *amb*, deren Gestalt hauptsächlich von der Figur des Körpers abhängt. Jene Veränderung findet bis zu einer gewissen Entfernung von der Oberfläche dieses Körpers statt; darüber hinaus wird die ursprüngliche Bewegung des Fluidums nicht merklich verändert. Man kann sich die Figur vorstellen, welche die Gesammtheit der Fluidumsfäden,

Fig. 49.



deren Richtung geändert ist, bildet. Stets haben die Curven *amb*, welche die Fäden beschreiben, zwei zu unterscheidende Theile: in dem ersten *am* wenden sie dem Körper ihre convexe, in dem zweiten *mb* ihre concave Seite zu. In dem ersten Theile wächst die Geschwindigkeit von *a* bis *m*; in dem zweiten Theile nimmt sie von *m* bis *b* ab. Man kann nun, wenn man sich denkt, daß der Faden *amb* von *a* bis *m* innerhalb einer festen Wand fließt, den auf diese Wand der Richtung des Stromes *AB* parallel wirkenden Druck nach den in §. 422 gegebenen Formeln bestimmen. Dieser Druck wird jedesmal von einem Faden auf den andern übertragen und die Gesammtheit desselben wirkt auf die Vorderseite *PP* des Körpers. Deshalb ist der auf diese Seite ausgeübte Druck stärker, als er sein würde, wenn das Fluidum sich nicht bewegte. Der Druck, welchen die Wand des Theils *mb* der Fäden erleiden würde, wirkt nach der entgegengesetzten Richtung in Beziehung auf den Körper. Demnach wirkt der Druck, der aus der Abweichung der Flüssigkeitsfäden von ihrer Richtung in diesem Theile hervorgeht, auf das Fluidum in der Umgebung und der Druck gegen die hintere Seite *QQ* ist kleiner, als der Druck, der auf sie im ruhenden Zustande des Fluidums wirken würde. Diese Bemerkungen stimmen mit den durch directe Beobachtungen und Experimente erlangten Resultaten völlig überein.

Betrachtet man ferner die Ausdrücke für *E* und *F* in §. 422; so erkennt man, daß sie aus drei Factoren bestehen, nämlich der Dichtigkeit ϱ des Fluidums, dem Producte $U\Omega^2$ und der Größe $\cos.\lambda' - \frac{\Omega}{O}\cos.\lambda$, welche von der Richtung der Röhre an ihren beiden Enden und dem Verhältniß der äußersten Schichten abhängt. Stellt man hiermit die Resultate der Beobachtungen zusammen, so wird man auf

folgende Schlüsse geleitet: 1) wenn die Gestalten der Körper ähnlich sind und allein die absoluten Dimensionen sich geändert haben; so müssen auch die Flüssigkeitsfäden, die von ihrer Richtung abgeleitet sind, sämmtlich ähnliche Figuren bilden, in deren verschiedenen Theilen die Geschwindigkeiten der Massetheilchen in demselben Verhältnisse stehen, so daß sich in dem Ausdruck für den jedem der Fäden zugehörenden Druck nichts ändert, als der Factor Ω, welcher im Verhältniß, wie die lineären Dimensionen des Körpers, wächst; 2) wenn der Körper derselbe bleibt und nur die Geschwindigkeit des Stromes sich ändert; so müssen sowohl die Gestalt der Flüssigkeitsfäden, als die Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten der Massetheilchen in den verschiedenen Theilen jener Fäden ungeändert bleiben, so daß der Druck stets dem Quadrat dieser Geschwindigkeit proportional bleibt.

§. 440. Dieser Annahme gemäß, welche von der Wahrheit nicht sehr weit entfernt sein kann, drücken wir allgemein den Druck, den ein der Einwirkung eines Stroms einer Flüssigkeit unterliegender Körper erleidet, durch die Formel aus

$$k \, . \, \varrho \Omega U^2,$$

in welcher Ω den Flächeninhalt des größten Querschnitts des Körpers, U die Geschwindigkeit des Stroms und k einen für alle Körper von ähnlicher Gestalt constanten Coefficienten, der jedoch für andere Gestalten andere Werthe annimmt und dessen Werth nur durch directe Experimente erkannt werden kann, darstellt.

Statt des vorigen Ausdrucks kann man auch schreiben

$$\Pi \, . \, \Omega k \, . \, H;$$

wenn man durch Π das Gewicht der Volumeneinheit des Fluidums und durch H die zur Geschwindigkeit des Stroms gehörige Höhe bezeichnet. Diese letzte dem Ausdruck gegebene

Form giebt uns den auf den Körper wirkenden Druck als das Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche der Querschnitt des Körpers, deren Höhe das $k$fache der zu der Geschwindigkeit des Stroms gehörigen Höhe H ist. Man hat demnach für die verschieden gestalteten Körper allein noch den Werth des Coefficienten k zu bestimmen.

Wir haben die obigen Sätze entwickelt, indem wir einen unbewegten Körper betrachteten, gegen welchen der Stoß eines Flüssigkeitsstroms wirkt. Sie lassen sich jedoch auch auf einen Körper anwenden, der sich in einem in Ruhe befindlichen Fluidum, oder in einem Flüssigkeitsstrome bewegt, dessen Geschwindigkeit von der seinigen verschieden ist. Im letztern Falle ist U die relative Geschwindigkeit des Körpers gegen das Fluidum; und man nimmt gewöhnlich an, daß der Ausdruck $\Pi\Omega.kH$ und dieselben Werthe des Coefficienten k auf alle diese Fälle gleichmäßig angewandt werden können.

§. 441. Die eben entwickelten Resultate stimmen im Allgemeinen mit dem, was wir aus Erfahrung von dem Widerstande der Fluida wissen, überein. Dabei muß man jedoch noch auf einige Punkte besonders Rücksicht nehmen, welche in einigen Fällen diese Resultate modificieren. Die wichtigsten derselben sind folgende:

1) Die Adhäsion der Flüssigkeitstheilchen bringt merkliche Wirkungen hervor, wenn die Geschwindigkeit des Stroms klein, wenn der Körper sehr klein oder nach Richtung der Bewegung sehr verlängert ist. In diesem Falle muß man, um den wirklich statthabenden Druck zu geben, zu der Formel in §. 440 einen Ausdruck hinzufügen, der der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

2) Weil in luftförmigen Fluiden die Dichtigkeit mit dem Druck gegen die Vorderseite des Körpers wächst, so wächst der Widerstand in rascherm Verhältniß als dem des

Quadrats der Geschwindigkeit. Diese Modification wird nur bei sehr großen Geschwindigkeiten bemerkbar.

3) Wenn ein Körper sich im Wasser sehr nahe an der Oberfläche bewegt, und noch weit mehr, wenn er auf denselben schwimmt; so ändert sich die Bewegung der Flüssigkeitsfäden auf andere Weise, als wenn das Fluidum nach allen Richtungen unendlich ist; die Oberfläche des Wassers bleibt dabei nicht eben und es ändert sich darnach der durch das Gewicht des Fluidums hervorgebrachte Druck auf die verschiedenen Theile der Oberfläche des Körpers. Den daraus hervorgehenden Zuwachs des Widerstandes könnte man durch einen Ausdruck darstellen, der der vierten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist; dies natürlich nur unter der Voraussetzung, daß der Körper dem Stoß des Fluidums stets dieselbe Oberfläche bietet. Da nun aber die Erfahrung lehrt, daß der Körper in dem Maße, wie die Geschwindigkeit wächst, gegen die Oberfläche des Wassers eine andere Lage annimmt; so ändert sich auch darnach das Gesetz des Widerstandes.

4) Man kann sich stets einen so großen Werth der Geschwindigkeit denken, daß das Fluidum den leeren Raum, der sich an der hintern Seite zu bilden strebt, nicht ausfüllt. Der Ausdruck für den Widerstand würde dann ein ganz anderer werden. Der Druck, den z. B. ein in das Wasser getauchter Körper erleiden würde, hinge in diesem Falle von seiner Entfernung von der Oberfläche des Fluidums ab.

§. 442. Wir wollen nun noch die Hauptresultate, die man aus Versuchen abgeleitet hat, geben, wobei wir erstens bemerken, daß dem Stoß des Fluidums senkrecht ausgesetzte ebene Oberflächen von verschiedener Größe, da man für alle die Dicke als sehr klein annimmt, nicht ähnlich gestaltete Körper sind; es ist daher ganz in der Ordnung, daß hier

der Widerstand der Flächengröße der Ebene nicht proportional ist; der Coefficient k wächst im Gegentheil mit dem absoluten Werthe dieser Flächengröße. Nach Versuchen weiß man, daß ungefähr $k = 1,4$, wenn die Quadratwurzel aus dem Flächeninhalte $= 0,1$ Meter, daß $k = 1,5$, wenn diese Quadratwurzel 0,32 Meter ist. Mit größern Flächen sind noch nicht hinreichend genaue Experimente gemacht; doch scheint es, daß für Ebenen von der Größe der Windmühlflügel oder der Schiffssegel k wenigstens $= 3$ ist.

Die folgende Tafel giebt die Werthe des Coefficienten k für verschiedene Körper.

	Werthe des Coefficienten k
Für eine mit mittelmäßiger Geschwindigkeit im Wasser oder in der Luft bewegte Kugel	0,6
Für eine mit einer Geschwindigkeit von 50 Meter in der Secunde in der Luft bewegte Kugel	0,7
Für eine mit einer Geschwindigkeit von 250 Meter in der Secunde in der Luft bewegte Kugel	0,81
Für eine mit einer Geschwindigkeit von 300 Meter in der Secunde in der Luft bewegte Kugel	1,04
Für ein rechteckiges Prisma mit ebenen Grundflächen, dessen Länge seiner Breite ungefähr gleich ist	1,4
Für dasselbe, wenn es 6—10 mal so lang als breit ist	1,1
Für ein rechtwinklichtes flaches Fahrzeug ohne Vordertheil, aber mit einem Hintertheile	1
Für dasselbe mit einem Hintertheile und einem aus zwei verticalen Ebenen gebildeten Vordertheile, die so weit vorspringen, als das Fahrzeug breit ist	0,55
Für dasselbe, wenn die das Vordertheil bildenden Ebenen doppelt so weit vorspringen, als die Breite beträgt	0,45
Für dasselbe, wenn das Vordertheil durch einen halben verticalen Cylinder gebildet ist	0,5
Für dasselbe, wenn das Vordertheil gebildet ist durch die Verlängerung des Prisma, das unten durch eine unter dem Winkel von 30° gegen den Horizont geneigte Ebene abgeschnitten ist	0,45
Für ein Fahrzeug von der Gestalt der besten Seeschiffe .	0,18

Aller Wahrscheinlichkeit nach giebt dies letzte Resultat den kleinsten Werth an, den der Coefficient k überall annehmen kann. Bei diesen Berechnungen hat man stets in dem Fluidum bei weitem größere Querdimensionen vorausgesetzt, als die des Körpers sind. Denn man weiß, daß in engen oder flachen Canälen der Widerstand, den die Böte zu besiegen haben, sehr fühlbar wächst.

Berichtigung.

Pag. 271 Z. 4 und Z. 7 von unten ist statt (a^2-b^2) zu lesen (a^2+b^2).